

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS

**ANÁLISIS DINÁMICO DE LOS SISTEMAS CIRCUMBINARIOS KEPLER-
453 Y KEPLER-1647**

POR

MIRANDA ABIGAIL ORTIZ ALONSO

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN ASTROFÍSICA PLANETARIA
Y TECNOLOGÍAS AFINES**

MARZO, 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS
ANÁLISIS DINÁMICO DE LOS SISTEMAS CIRCUMBINARIOS KEPLER-453 Y KEPLER-1647

POR
MIRANDA ABIGAIL ORTIZ ALONSO

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN ASTROFÍSICA PLANETARIA
Y TECNOLOGÍAS AFINES

DIRECTOR DE TESIS
DR. CARLOS ESTEBAN CHAVEZ PECH

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

MARZO, 2021

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Los miembros del Comité de Revisión de Reporte de Proyecto recomendamos que el trabajo titulado “Análisis dinámico de los sistemas circumbinarios Kepler-453 y Kepler-1647”, realizado por la alumna Miranda Abigail Ortiz Alonso, con número de matrícula 0798894, sea aceptada para su defensa y cumplir con los requisitos para obtener del grado de Maestría en Astrofísica Planetaria y Tecnologías Afines.



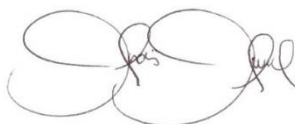
Dr. Carlos Esteban Chávez Pech

Presidente



Dr. Francisco Javier Tamayo Amaya

Secretario



Dr. Andrés Alberto Avilés Alvarado

Vocal

RESUMEN

La presente investigación trata sobre el análisis de la estabilidad en exoplanetas que orbitan alrededor de sistemas con dos estrellas, es decir, circumbinarios. Específicamente en esta tesis, se analiza la estabilidad y el ambiente dinámico de los sistemas circumbinarios Kepler-453 y Kepler-1647. En primera instancia se integraron numéricamente las ecuaciones de movimiento de los sistemas mencionados, y se obtuvo la evolución dinámica de sus respectivos elementos orbitales a través del tiempo. Posteriormente se realizó la búsqueda del semieje mayor crítico más pequeño, y con esto observar si los planetas se encuentran en zonas dinámicamente estables. Finalmente se realizaron búsquedas de áreas inestables mediante mapas de estabilidad.

Palabras clave: Sistemas circumbinarios, exoplanetas, estabilidad dinámica, integraciones numéricas, ecuaciones de movimiento, elementos orbitales.

ABSTRACT

This research deals with the analysis of the stability of exoplanets orbiting close systems with two stars, i.e. circumbinary planets. Specifically, in this thesis, the stability and dynamic environment are analyzed two circumbinary systems Kepler-453 and Kepler-1647. We numerically integrated the equations of motion and the dynamic evolution of the orbital elements obtained over time is checked. Then search for the critical semi-major axis smaller performed, and thereby see if the planets are in dynamically stable areas. Finally, we search for unstable areas using stability maps.

Keywords: circumbinary systems, exoplanets, dynamic stability, numerical integrations, equations of motion, orbital elements.

Agradecimientos

A:

Dr. Eduardo Pérez Tijerina

Dra. Sandra Angélica Ayala Gómez.

Dr. José Enrique Pérez León.

Dr. Andrés Alberto Avilés Alvarado.

Dr. Ángel Enrique Sánchez Colín.

Dra. Bárbara Selén Pichardo Silva (QEPD).

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez.

Dra. Antígona Segura Peralta.

Dr. Javier Morales Castillo

Dr. Francisco Javier Tamayo Amaya

Por su apoyo, revisión y comentarios durante la realización de esta tesis.

Dedicatorias

Le dedico este trabajo a:

A mi pareja, amiga, compañera y amante: Yesenia

*Sin ti Miranda nunca hubiera existido, te amo. Gracias por todo tu apoyo y comprensión en todos los aspectos. Han pasado tantas cosas y aunque se han cometido errores, mi amor por ti es inconmensurable, por lo que cualquier obstáculo que se interponga entre nosotras lo superaremos. Te dedico esta tesis, mi trabajo de dos años, en donde tu confianza en mí ha sido de gran ayuda. Mi camino, si ya está trazado, pero tú lo vas a delinear y a tu lado creceremos juntas. Tal y como quedo establecido en el Cerro de las Mitras, vamos a alcanzar grandes alturas ambas. Te necesito a mi lado como siempre, mi amor, mi vida, mi cariño. ¡Caminemos juntas por la vida! **Nada tiene de especial, dos mujeres que se dan la mano...Te amo con todo mi ser.***

A mi hija Vanessa

Nunca me has dejado caer y en los momentos más difíciles, me dices te quiero.

A mi Asesor y amigo

Carlos Esteban Chávez Pech, por guiarme y apoyarme en todo el trayecto de esta investigación, y por apoyarme hacia mi doctorado.

A mis amigos

Elizabeth Lozano, Eva Morales y Carmen Zamora, difícilmente puedo llamar amiga a alguien, ustedes se lo ganaron. Gracias por su amistad.

TABLA DE CONTENIDO

Sección	Página
Resumen y Abstract.....	iii
Agradecimientos.....	iv
Dedicatorias.....	v
Tabla de contenido.....	vi
Lista de figuras.....	ix
Lista de tablas.....	xii
Nomenclatura y simbología.....	xii
Introducción.....	1
Capítulo 1: Exoplanetas, métodos de detección y sistemas binarios.....	4
1.1 Desarrollo histórico de los descubrimientos de exoplanetas.....	4
1.2 Métodos de detección.....	8
1.2.1 Astrometría de posición.....	8
1.2.2 Microlentes gravitacionales.....	11
1.2.3 Método de velocidad radial.....	12
1.2.4 Método de tránsitos planetarios.....	26
1.3 Los sistemas binarios y su clasificación.....	34
1.3.1 Clasificación observacional de las binarias.....	36
1.4 Tipos de órbitas en sistemas binarios.....	39
1.5 Exoplanetas en sistemas circumbinarios.....	41
1.6 Estructura de la tesis.....	45
Capítulo 2: Aspectos teóricos de mecánica celeste.....	46
2.1 Las leyes de Kepler. Una introducción a las órbitas elípticas.....	46
2.1.1 Tycho Brahe.....	47
2.1.2 Las leyes de Kepler del movimiento planetario.....	47
2.1.3 La ecuación de la órbita.....	49
2.2 Ley de la Gravitación Universal de Newton.....	52
2.3 Derivación de las leyes de Kepler.....	53
2.3.1 El Problema de dos cuerpos. Las ecuaciones de movimiento....	53

2.3.2 El movimiento relativo.....	55
2.3.3 Ecuaciones de movimiento en coordenadas baricéntricas...	56
2.3.4 La versión newtoniana de las leyes de Kepler.....	57
2.4 El problema de <i>n-cuerpos</i>	58
2.5 Elementos orbitales.....	61
Capítulo 3: Antecedentes y características de los sistemas	66
circumbinarios Kepler-453 y Kepler-1647.	
3.1 Características generales del sistema circumbinario Kepler-453.....	66
3.1.1 Las curvas de luz del exoplaneta Kepler-453b.....	67
3.1.2 Espectroscopía de alta resolución (HRS).....	68
3.1.3 La órbita del sistema Kepler-453.....	71
3.2 Características generales del sistema circumbinario Kepler-1647.....	73
3.2.1 Las Curvas de Luz del Exoplaneta Kepler-1647b.....	74
3.2.2 Espectroscopía de alta resolución (HRS).....	75
3.2.3 La órbita del sistema Kepler-1467.....	77
Capítulo 4: Metodología y modelado numérico.....	80
4.1 Estabilidad dinámica.....	80
4.1.1 Consideraciones y condiciones iniciales de integración.....	83
4.2 Metodología científica e integración numérica.....	85
Capítulo 5: Resultados y análisis de estabilidad dinámica.....	96
5.1 Evolución de los elementos orbitales a largo plazo.....	96
5.2 Búsqueda del semieje mayor crítico.....	98
5.3 Mapas de estabilidad: distancia al pericentro vs excentricidad del planeta inicial.....	100
Capítulo 6: Discusión, conclusiones y trabajo a futuro.....	105
6.1 Discusión.....	105
6.2 Conclusiones.....	108
6.3 Trabajo a futuro.....	110
Apéndices.....	111
A.1 Definiciones básicas de dinámica lineal.....	111
A.1.1 Conceptos básicos de análisis dinámico.....	112

A.1.2 Métodos analíticos.....	113
A.1.3 Integraciones de <i>n-cuerpos</i>	114
A.2 Códigos computacionales utilizados en la tesis.....	115
A.2.1 Programa en Fortran para resolver las ecuaciones del movimiento planetario.....	115
A.2.2 Subrutina en Fortran para el integrador simpléctico Mikkola...	122
A.3 El satélite Kepler de la NASA.....	136
Referencias bibliográficas.....	141

LISTA DE FIGURAS

Figura	Nombre	Página
Capítulo 1		
Figura 1.1	Impresión artística del planeta 51 Pegasi b.....	6
Figura 1.2	Impresión artística del planeta Gliese-876b y su estrella.....	9
Figura 1.3	Impresión artística del satélite GAIA.....	10
Figura 1.4	Un ejemplo de microlente gravitacional.....	11
Figura 1.5	El método de velocidad radial.....	14
Figura 1.6	Efecto Doppler, corrimientos gravitacionales.....	15
Figura 1.7	Grafica de velocidad radial V_r vs ángulo de línea de visión θ , para una velocidad constante de 100ms^{-1}	16
Figura 1.8	Mediciones de velocidad radial V_r para 51 Pegasi.....	16
Figura 1.9	Esquema que representa la situación 1.....	17
Figura 1.10	Esquema que representa la situación 2.....	18
Figura 1.11	Esquema que representa la situación 3.....	18
Figura 1.12	Esquema que representa las posiciones de la estrella y el planeta en sus respectivas orbitas, con respecto al centro de masas.....	20
Figura 1.13	Gráfico que muestra los puntos en donde se localizan la estrella y el planeta, para obtener una velocidad radial máxima.....	21
Figura 1.14	Diagrama que ilustra los principios de un tránsito planetario frente a una estrella, y la fotometría asociada curva de luz.....	28
Figura 1.15	La geometría para observar un tránsito planetario.....	28
Figura 1.16	Probabilidad de un tránsito por un planeta en órbita alrededor de una estrella de tipo solar en función de su distancia de la estrella, y su periodo orbital.....	30
Figura 1.17	La geometría de un tránsito planetario. Fases de ingreso y egreso.....	31
Figura 1.18	La geometría de un tránsito planetario. Relación entre el parámetro de impacto y la duración del tránsito.....	32
Figura 1.19	Representación gráfica de las estrellas binarias distantes.....	35
Figura 1.20	Representación gráfica de las estrellas binarias cercanas.....	35
Figura 1.21	Representación gráfica de las estrellas binarias de contacto.....	36

Figura 1.22	Representación de dos estrellas binarias visuales orbitando a un centro de masas común.....	37
Figura 1.23	Imagen de la estrella binaria visual Sirio, tomada por el telescopio espacial Hubble.....	37
Figura 1.24	Representación de dos estrellas binarias astrométricas orbitando a un centro de masas común.....	38
Figura 1.25	Espectro de la binaria espectroscópica Arietis κ	38
Figura 1.26	Curvas de luz para binarias fotométricas, a) Tipo Algol, b) Tipo β Lyrae y c) W Ursa Majoris.....	39
Figura 1.27	Ejemplo de una órbita Tipo P.....	40
Figura 1.28	Ejemplo de una órbita Tipo S.....	40
Figura 1.29	Ejemplo de una órbita Tipo L.....	41

Capítulo 2

Figura 2.1	Representación gráfica de la segunda ley de Kepler.....	48
Figura 2.2	La geometría de una elipse.....	49
Figura 2.3	Dos masas m_1 y m_2 orbitando un centro de masas común C	54
Figura 2.4	Dos masas m_1 y m_2 orbitando un centro de masas común C , colocado en el origen del sistema cartesiano.....	55
Figura 2.5	Representación geométrica de los elementos orbitales.....	62
Figura 2.6	Diagrama donde se aprecian los ángulos de la Anomalía Media (M), Anomalía Excéntrica (E) y anomalía verdadera (T) la órbita elíptica y la circunferencia principal.....	65

Capítulo 3

Figura 3.1	Diagrama indicativo del flujo de radiación normalizado que recibe Kepler-453b por parte de sus estrellas madre.....	67
Figura 3.2	Velocidades radiales para la estrella primaria y la curva del modelado fotodinámico (ELC) que mejor se ajusta, representada en función del tiempo.....	69
Figura 3.3	La orientación de la órbita del sistema Kepler-453 y su vista desde la Tierra.....	71

Figura 3.4	Oscilación durante 103 años de inclinación orbital del planeta Kepler-453b.....	72
Figura 3.5	Diagrama indicativo del flujo de radiación normalizado que recibe Kepler-1647b por parte de sus estrellas madre.....	74
Figura 3.6	Curvas de velocidad radial para los componentes primario y secundario del sistema binario Kepler-1647.....	76
Figura 3.7	La orientación de la órbita del sistema Kepler-1647 y su vista desde la Tierra.....	78

Capítulo 4

Figura 4.1	Sistema de coordenadas jacobianas para la determinación de las ecuaciones del movimiento planetario.....	85
Figura 4.2	Evolución del semieje mayor para Kepler-64b basado en Kostov et al. (2013). Grafico tomado de: A dynamical stability study of Kepler circumbinary planetary systems with one planet Chávez et al. (2015).....	89
Figura 4.3	Evolución de la excentricidad para Kepler-64b basado en Kostov et al. (2013). Grafico tomado de: A dynamical stability study of Kepler circumbinary planetary systems with one planet Chávez et al. (2015).	90

Capítulo 5

Figura 5.1	Evolución del semieje mayor y la excentricidad para Kepler-453b....	92
Figura 5.2	Evolución del semieje mayor y la excentricidad para Kepler-1647b...	93
Figura 5.3	Mapa de excentricidad vs distancia al pericentro para Kepler-453b....	98
Figura 5.4	Mapa de excentricidad vs distancia al pericentro para Kepler-1647b...	99
Figura 5.5	Acercamiento del mapa de excentricidad vs distancia al pericentro para Kepler-1647b.....	100

Capítulo 6

Figura 6.1	Mapa del indicador MEGNO para Kepler-453b.....	103
Figura 6.2	Mapa del indicador MEGNO para Kepler-1647b.....	103

Apéndices

Figura A.1	Un ejemplo de una órbita periódica.....	107
Figura A.2	Un ejemplo de una órbita caótica.....	107
Figura A.3	Curva de luz del planeta extrasolar HAT-P-7.....	134

Figura A.4	Estructura interior del satélite Kepler.....	134
Figura A.5	Estructura exterior del satélite Kepler.....	135
Figura A.6	Órbita del satélite Kepler.....	135
Figura A.7	El campo de visión del satélite Kepler.....	136
Figura A.8	Histograma con descubrimientos de exoplanetas 1995-2014.....	137
Figura A.9	Representación artística del satélite TESS.....	141
Figura A.10	Órbita del satélite TESS.....	142
Figura A.11	Los 26 sectores de observación del cielo planeados para TESS y las zonas superpuestas.....	143
Figura A.12	La primera imagen tomada por TESS, en donde se muestran el mosaico utilizando cuatro cámaras.....	144

LISTA DE TABLAS

Tabla	Nombre	Página
Tabla 1.1	Numero de exoplanetas descubiertos en base a su técnica de detección.....	12
Tabla 1.2	Lista de planetas circumbinarios confirmandos hasta Julio de 2016.....	44
Tabla 2.1	La ecuación del radio vector dependiendo el tipo de orbita geométrica.....	51
Tabla 3.1	Velocidades radiales para Kepler-453b.....	68
Tabla 3.2	Parámetros físicos y elementos orbitales para el sistema binario Kepler-453.....	70
Tabla 3.3	Parámetros físicos y elementos orbitales para el exoplaneta Kepler-453b.....	70
Tabla 3.4	Tránsitos a través de la estrella primaria para el sistema Kepler-453b.....	73
Tabla 3.5	Parámetros del sistema binario Kepler-1647.....	76
Tabla 3.6	Mediciones de velocidad radial para el sistema binario Kepler-1647.....	77
Tabla 4.1	Parámetros de coordenadas y velocidades baricéntricas para el sistema Kepler-453.....	86
Tabla 4.2	Parámetros de coordenadas y velocidades baricéntricas para el sistema Kepler-1647.....	87
Tabla 4.3	Resumen de los elementos orbitales para los sistemas binarios Kepler-453 y Kepler-1647.	88
Tabla 4.4	Resumen de los elementos orbitales para los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b.....	88
Tabla 5.1	Semieje mayor crítico planetario para Kepler-453b y Kepler-1647b.	95
Tabla 5.2	Semieje mayor, excentricidad y distancia al pericentro para los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b.	96

NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA

M_p	<i>Masa del planeta.</i>
M_J	<i>Masa de Júpiter.</i>
v_r	<i>Velocidad radial.</i>
$\Delta\lambda$	<i>Cambio en la longitud de onda.</i>
c	<i>Velocidad de la luz en el vacío.</i>
λ	<i>Longitud de onda de una línea espectral estacionaria medida en la Tierra.</i>
λ_0	<i>Longitud de onda de referencia.</i>
θ	<i>Ángulo que forma la línea de visión con el plano orbital.</i>
v	<i>Velocidad verdadera del objeto.</i>
i_0	<i>Ángulo de inclinación entre la línea de visión y la normal.</i>
θ_1	<i>Ángulo entre la línea de visión y el vector de velocidad de la estrella.</i>
v_{rmax}	<i>Velocidad radial máxima.</i>
v_*	<i>Velocidad orbital de la estrella.</i>
v_{*seni_0}	<i>Límite inferior de la velocidad orbital de la estrella.</i>
P	<i>Periodo orbital.</i>
a_*	<i>Radio orbital de la estrella.</i>
a_{*seni_0}	<i>Límite inferior del radio orbital de la estrella.</i>
L_*	<i>Luminosidad de la estrella.</i>
L_\odot	<i>Luminosidad del Sol.</i>
M_*, m_*	<i>Masa de la estrella.</i>
M_\odot	<i>Masa del Sol. 1.99×10^{30} Kg.</i>
a_p	<i>Semieje mayor del planeta.</i>
d	<i>Distancia del observador a la estrella.</i>
F_*	<i>Flujo de radiación proveniente de la estrella.</i>
G	<i>Constante de gravitación universal. $6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2}$.</i>
UA	<i>Unidad astronómica. $1.5 \times 10^{11} \text{ m}$.</i>
M_{pseni_0}	<i>Límite inferior de la masa del planeta.</i>
T	<i>Anomalía verdadera.</i>
$\tilde{\omega}$	<i>Ángulo en el plano orbital entre el pericentro y la línea de visión del sistema.</i>
K	<i>Semiamplitud del sistema estrella – planeta.</i>
pr	<i>Probabilidad de observación de un tránsito planetario.</i>
r_*	<i>Radio de la estrella.</i>

b	<i>Parámetro de impacto.</i>
r_p, R_p	<i>Radio del planeta.</i>
l	<i>Distancia del centro del planeta al centro de la estrella.</i>
τ	<i>Duración de un tránsito planetario.</i>
F_{off}	<i>Flujo estelar observado fuera del tránsito.</i>
F_{on}	<i>Flujo estelar observado durante el tránsito.</i>
ΔF	<i>Profundidad del tránsito.</i>
a	<i>Semieje mayor.</i>
r y r'	<i>Distancias a los puntos focales F y F', respectivamente.</i>
e	<i>Excentricidad.</i>
b	<i>Semieje menor.</i>
p	<i>Lado recto.</i>
v	<i>Velocidad tangencial.</i>
k	<i>Constante de proporcionalidad.</i>
M, m	<i>Masa de un objeto celeste cualquiera.</i>
F	<i>Fuerza centrípeta.</i>
\mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2	<i>Vectores de posición.</i>
$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$	<i>Vector de separación entre dos estrellas.</i>
t	<i>Tiempo.</i>
\mathbf{r}''	<i>Vector de aceleración.</i>
\mathbf{u}	<i>Vector unitario.</i>
\mathbf{R}	<i>Vector promedio de los vectores posición.</i>
μ	<i>Masa reducida.</i>
L	<i>Momento angular</i>
dA/dt	<i>Razón de cambio de área con respecto al tiempo.</i>
i	<i>Inclinación de la órbita.</i>
Ω	<i>Longitud del nodo ascendente.</i>
ω	<i>Argumento del pericentro.</i>
M	<i>Anomalía media.</i>
t_0	<i>Tiempo en el cual el planeta pasa por el pericentro.</i>
n	<i>Movimiento propio del cuerpo celeste.</i>
E	<i>Anomalía excéntrica.</i>
R_\oplus	<i>Radio de la Tierra.</i>

M_{\oplus}	<i>Masa de la Tierra.</i>
R	<i>Poder de resolución.</i>
T_{eff}	<i>Temperatura efectiva de la estrella.</i>
$[m/H]$	<i>Metalicidad de la estrella.</i>
$\log g$	<i>Gravedad superficial.</i>
M_1	<i>Masa de la estrella primaria.</i>
M_2	<i>Masa de la estrella secundaria.</i>
M_1/M_2	<i>Relación de masas del sistema binario.</i>
T_1/T_2	<i>Relación de temperaturas del sistema binario.</i>
T_1	<i>Temperatura efectiva de la estrella primaria.</i>
T_2	<i>Temperatura efectiva de la estrella secundaria.</i>
e_b	<i>Excentricidad del sistema binario.</i>
a_b	<i>Semieje mayor del sistema binario.</i>
F_1/F_2	<i>Relación de flujos del sistema binario.</i>
i_b	<i>Inclinación del sistema binario.</i>
P_p	<i>Periodo del planeta.</i>
e_p	<i>Excentricidad del planeta.</i>
i_p	<i>Inclinación del planeta.</i>
t_a, t_b	<i>Tiempo de ocurrencia de los tránsitos planetarios.</i>
Ga	<i>Giga - año. 1Giga = 1×10^9 años.</i>
ξ, η, ζ	<i>Posiciones del objeto celeste en sistema de coordenadas sinódicas.</i>
$\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$	<i>Aceleración del objeto celeste en coordenadas sinódicas.</i>
x, y, z	<i>Posiciones de objeto celeste en sistema de coordenadas baricéntricas.</i>
V_x, V_y, V_z	<i>Velocidades baricéntricas del objeto celeste.</i>
a_c	<i>Semieje mayor crítico.</i>
q_p	<i>Distancia al pericentro inicial del planeta.</i>
φ	<i>Ángulo o argumento resonante.</i>
ϵ	<i>Época.</i>
Δt	<i>Tiempo de paso.</i>
$R_p^{\text{crit.}}$	<i>Distancia al pericentro externo.</i>
e_{out}	<i>Excentricidad exterior de la binaria.</i>
a_{in}	<i>Semieje mayor interior de la binaria.</i>
H_1	<i>Energía kepleriana de la órbita de la estrella primaria.</i>

H_2	<i>Energía kepleriana de la órbita de la estrella secundaria.</i>
H_p	<i>Energía kepleriana de la órbita del planeta circumbinario.</i>

Introducción

Descripción del problema.

Utilizando los datos que se obtuvieron a través de las observaciones realizadas con el telescopio espacial Kepler (Welsh, Orosz, Short, et al. 2015; Kostov, Orosz, Welsh, et al. 2016) de la NASA (Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio, por sus siglas en inglés). Esta investigación muestra un estudio de estabilidad a largo plazo y en un ambiente dinámico de dos sistemas planetarios en estrellas binarias (Kepler-453b y Kepler-1647b); es decir, la variación de los elementos orbitales como función del tiempo. La investigación se va a centrar en realizar simulaciones numéricas de largo periodo. Lo anterior implica resolver completamente las ecuaciones del movimiento, esto con la finalidad de estudiar la estabilidad de la órbita planetaria. Esta situación nos lleva invariablemente a resolver numéricamente el problema de *3 cuerpos* completo.

La forma más exacta para determinar la evolución a largo plazo de un sistema es a través de un cálculo de *n cuerpos* (*un problema donde se deben de considerar las masas de los objetos en estudio, además de todas las perturbaciones de los demás objetos que influyen en el*). Sin embargo, no existe solución analítica posible en este tipo de problema, salvo que la escala de tiempo para analizar la estabilidad del sistema circumbinario sea corta (Murray y Dermott, 1999). De tal manera que para nuestro caso la única solución posible es el modelar el problema de forma numérica.

Con el objetivo de obtener la solución a este problema, se han diseñado integradores numéricos para analizar la estabilidad de la órbita planetaria y la estabilidad de sus alrededores. Existen integradores especiales para analizar la estabilidad de sistemas circumbinarios a escalas de tiempo mucho mayores (en el orden de 10^9 años, Correa-Otto, 2012). Particularmente para esta investigación, se analizará la estabilidad utilizando un integrador simpléctico diseñado para este tipo de sistemas (Mikkola e Innanen, 1999). Este tipo de integradores han sido probados analizando las ecuaciones de evolución del Sistema Solar para millones de años (Zamora, 1998).

Finalmente, esta tesis pretende desarrollar la búsqueda de zonas dinámicamente estables, que nos proporcionen información acerca del ambiente dinámico alrededor de cada sistema y nos den indicios sobre cómo se pudo haber formado tal planeta. Además, tales zonas dinámicamente estables posiblemente puedan albergar a otros planetas (todavía no detectados) en los sistemas circumbinarios Kepler-453b y Kepler-1647b.

Hipótesis.

Al realizar simulaciones numéricas en el problema completo de tres y cuatro cuerpos, se espera encontrar que las órbitas de los sistemas planetarios Kepler-453b y Kepler-1647b son dinámicamente estables.

Justificación del Proyecto.

Los avances tecnológicos en las técnicas de detección de exoplanetas han aumentado en forma sustancial el número de planetas extrasolares encontrados en los últimos 21 años (Mancini, Lillo-Box, Southworth, et al. 2016, exoplanet.eu). Durante este lapso, la confirmación de miles de exoplanetas en todo tipo de estrellas plantea importantes y trascendentales retos en la astrofísica. Entre tales retos se pueden citar los estudios de estabilidad y análisis dinámico a largo plazo, que ayudan a comprender si un exoplaneta que se encuentra en la zona habitable de su estrella anfitriona es capaz de desarrollar condiciones para la vida (Saytal, 2014). Los desarrollos tanto teóricos como observacionales han avanzado y también han sido reconocidos por la comunidad científica, siendo el caso de Michel Mayor y Didier Queloz los cuales fueron reconocidos con el Premio Nobel 2019.

Hasta hace 10 años uno de los cuestionamientos sin respuesta, con argumentos a favor y en contra, es si se pueden formar planetas alrededor de sistemas binarios. Así que, de manera adicional estos estudios nos proporcionan la oportunidad de entender la formación de los sistemas planetarios; así como su evolución alrededor de las estrellas binarias (Chávez et al. 2015).

Objetivos de la Investigación.

Se pretende mediante esta tesis desarrollar los siguientes objetivos:

1. Integración numérica a largo plazo (1Gigaaño) de las ecuaciones de movimiento para los dos sistemas Kepler-453b y Kepler-1647b.
2. Búsqueda del semieje mayor crítico, esto es, el semieje mayor más pequeño posible antes de que el sistema se vuelva inestable.
3. Construcción de mapas de estabilidad excentricidad vs. distancia al pericentro.

Capítulo 1

Exoplanetas, métodos de detección y sistemas binarios.

1.1 Desarrollo histórico de los descubrimientos de exoplanetas.

Desde que fueron descubiertos los primeros planetas fuera de nuestro Sistema Solar en 1992 (en torno a un púlsar) y en 1995 (en torno a una estrella de secuencia principal), este campo se ha convertido en uno de los de mayor crecimiento en la astronomía (Schneider, 2011). Un planeta es un objeto que orbita alrededor de una estrella, lo suficientemente masivo para haber alcanzado una forma casi esférica y también para despejar de polvo y desechos el disco protoplanetario en el cual se formó. Estas características diferencian a los planetas de los planetas enanos, los cuales no tienen masa suficiente para limpiar el área del disco protoplanetario. En el año 2001 (y modificada en 2003), la Unión Astronómica Internacional (UAI) definió de manera provisional el concepto de exoplaneta. Según la misma, los planetas fuera del Sistema Solar deben orbitar alrededor de una estrella o remanente de estrella (enana blanca o estrella de neutrones) y tener una masa inferior a 14 masas de Júpiter. Debido a su reducida masa, no alcanzan temperaturas y densidades en sus interiores lo suficientemente altas como para fusionar deuterio o cualquier otro elemento químico. Por tanto, no producen energía a partir de fusión nuclear.

La primera referencia histórica de los exoplanetas se remonta al siglo IV a.C., en donde Epicuro escribió una carta a Herodoto en la cual uno de sus párrafos menciona: “Hay un número infinito de mundos, algunos como el nuestro, otros diferentes” (Caro y Silva, 2008). Ya en el siglo XVI de nuestra era, Giordano Bruno (1548-1600) quien fuera astrónomo partidario de las ideas copernicanas de que la Tierra y los demás planetas giran alrededor del Sol; presentó la opinión de que las estrellas fijas son similares al Sol, y que también son acompañadas por sus propios planetas (Gilarte, 2013). Desgraciadamente por esta afirmación fue quemado en la hoguera, y su muerte provocó un retraso considerable en la revolución científica.

Sir Isaac Newton (1643-1727) también consideró la existencia de otros mundos. Cohen y Whitman (1999) exponen en su obra titulada *“The Principia: A New Translation and Guide”* (traducción moderna de la obra cumbre *“Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”*), que Newton creía que las estrellas deberían de ser soles con sistemas planetarios similares al nuestro. Las citas acerca de detecciones de exoplanetas y la astrometría de la misma se han hecho desde el siglo XIX. Una cita sobresaliente involucra a la estrella binaria 70 Ophiuchi. En 1855 el capitán W.S. Jacob en el Observatorio de Madrás de la Compañía Británica de las Indias Orientales, reportó que las anomalías orbitales hacían muy probable que existiera un cuerpo planetario en este sistema binario (Jacob, 1855). En la década de 1890, esta hipótesis fue reforzada en la Universidad de Chicago y el Observatorio Naval de los Estados Unidos. Thomas See (1896) declaró que las anomalías orbitales de la estrella probaban la existencia de un cuerpo oscuro en el sistema 70 Ophiuchi, con un periodo orbital de 36 años alrededor de una de las estrellas del sistema binario. Sin embargo, todas estas conjeturas y especulaciones acerca de este exoplaneta se terminaron, cuando en 1889 se demostró que un sistema de tres cuerpos con estos parámetros orbitales sería altamente inestable.

A mediados del siglo XX, utilizando nuevamente la astrometría, se realizaron estudios de análisis dinámico en la estrella de Barnard, en dichos estudios se proponía que la estrella tuviera dos compañeros o exoplanetas tipo Júpiter en órbita (Van de Kamp, 1969). Actualmente los astrónomos refieren en general que todos los informes iniciales de detección eran equívocos (Boss, 2009). Fue hasta inicios de la década de 1990, cuando se afirmó haber descubierto un planeta en órbita alrededor de una estrella de neutrones ^[1], también conocida como pulsar PSR 1829-10, usando el método de medidas del tiempo del pulso de radio ^[2] (Bailes, Lyne y Shemar, 1991). Este hecho recibió inmediatamente una intensa atención. No obstante, en enero de 1992, ellos mismos, encontraron errores en sus cálculos, que provocaron el retractarse de su descubrimiento haciendo la publicación en la revista Nature (Lyne y Bailes, 1992).

El 9 de enero de 1992, se detectó un sistema planetario orbitando al pulsar PSR B1257 + 12 (actualmente denominado Lich, UAI, 2015); tal sistema constaba de tres objetos de baja masa orbitando al pulsar (Wolszczan y Frail, 1992). Tales objetos eran los exoplanetas PSR B1257+12b, PSR B1257+12c y PSR B1257+12d (Draug, Poltergeist y Phobetor respectivamente) ^[3]. En 1995 en el Observatorio de Ginebra fue detectado el primer exoplaneta orbitando a una estrella de la secuencia principal, la estrella era 51 Pegasi (Mayor y Queloz, 1995) (premio nobel 2019). El planeta fue denominado 51 Pegasi b (Figura 1.1), tiene aproximadamente la mitad de la masa de Júpiter, gira alrededor de su estrella (periodo orbital) de 4 días terrestres, y se encuentra ocho veces más cerca de su estrella que Mercurio del Sol. De acuerdo con Rodríguez, L. F. (2015), la mayoría de los primeros exoplanetas descubiertos tienen una masa parecida a la de Júpiter (6 veces mayor), pero orbitan muy cerca de sus estrellas; por lo tanto, están muy calientes. A estos planetas se les conoce como “*Júpiteres calientes*”.

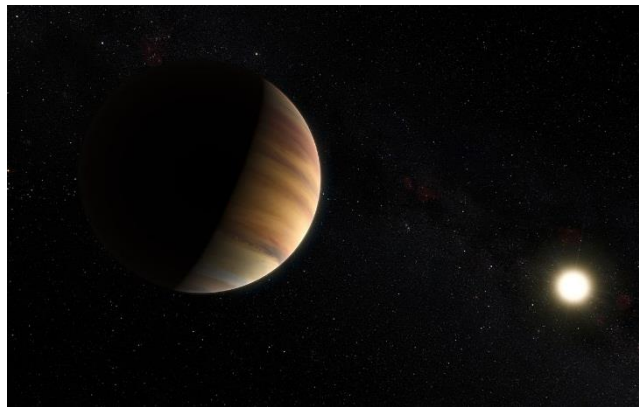


Figura 1.1 Impresión artística del planeta 51 Pegasi b. Imagen Crédito: ESO/M. Kornmesser/Nick

Los astrónomos se sorprendieron por estos “*Júpiteres calientes*”, porque los planetas gigantes de acuerdo con los modelos sólo se deben formar a grandes distancias de las estrellas (Barnes, Barman, Jones, et al., 2008). Con el tiempo se encontraron más planetas de otros tipos, y en la actualidad es evidente que los “*Júpiteres calientes*” son una minoría en lo que respecta a planetas extrasolares (era un sesgo observacional al ser más fácilmente detectables). En 1999, Upsilon Andromedae (Titawin, UAI, 2015) se convirtió en la primera estrella de secuencia principal conocida por tener múltiples planetas (más de tres planetas)

(Buttler, Marcy, Fischer, et al., 1999). Más adelante un grupo de astrónomos mexicanos (Curiel et al., 2011) descubrieron un cuarto planeta para esta estrella. A raíz del lanzamiento del Satélite Kepler de la NASA, en el año 2009, los descubrimientos de exoplanetas se incrementaron de manera sustancial. El 95% de los exoplanetas descubiertos eran más pequeños que Neptuno y cuatro incluyendo Kepler-296f eran menos de dos veces y medio el tamaño de la Tierra, además de que se encontraban en las zonas habitables de sus estrellas madre (Johnson, y Harrington, 2014).

El primer planeta extrasolar encontrado alrededor de un sistema binario, Kepler-16, que consta de dos estrellas de secuencia principal (Doyle, Carter, Fabrycky, et al., 2011), el cual orbita a las dos estrellas con un periodo orbital de 228 días y su tamaño es aproximadamente el de Saturno. De acuerdo con Rodríguez L.F., el 15 de junio de 2015, el número de planetas descubiertos fuera del Sistema Solar era 1932. Actualmente, en el instante en que se escriben estas líneas (13 de enero de 2021) el número de exoplanetas confirmados es 4404, esto es de acuerdo con la base de datos de Extrasolar Planet Encyclopaedia.

[1] Un tipo especial de estrella de neutrones también es denominada pulsar, tal objeto emite radiación muy intensa a intervalos cortos y regulares. Son los remanentes estelares resultantes del colapso gravitacional de estrellas súper gigantes masivas después de agotar su combustible y explotar como súper nova. Las estrellas de neutrones típicas tienen una masa de entre 1.35 y $2.1M_{\odot}$.

[2] Dado que un pulsar emite ondas de radio muy regularmente a medida que gira. Leves anomalías en el momento de sus pulsos de radio que se observan son utilizadas para rastrear, los cambios en el movimiento del pulsar causado por la presencia de planetas (Sigurdsson, Richer, Hansen, et al. 2008).

[3] Para la nomenclatura de exoplanetas se considera la letra minúscula “a” para la estrella madre, pero no se coloca para evitar confusiones con la estrella primaria si es un sistema binario. Entonces se coloca “b” para el primer planeta, “c” para el segundo planeta, y así sucesivamente.

1.2 Métodos de Detección.

Dado que es difícil detectar de manera directa los planetas extrasolares, generalmente se utilizan métodos de detección indirectos (Olliver, Encrenaz, Roques, et al. 2009). Tal como lo indican Fisher, Howard, Laughlin, et al. (2015) gracias a los métodos de detección indirectos, los astrónomos están comenzando a modelar las atmósferas y los interiores de los exoplanetas; además, están desarrollando los procesos para comprender la formación planetaria y su evolución (Armitage, 2011). Los métodos indirectos más utilizados para lograr estos propósitos son (el orden en que aparecen es en base al número de descubrimientos):

- Fotometría de Tránsitos.
- Espectroscopia Doppler o Método de Velocidad Radial.
- Microlentes Gravitacionales.
- Astrometría de Posición.

A grandes rasgos definiremos estas técnicas, y en esta tesis se realizará un análisis profundo y riguroso en los métodos de velocidad radial y de tránsitos planetarios, esto debido a que tales técnicas nos serán de gran ayuda en la caracterización y estabilidad de los sistemas circumbinarios Kepler-453b y Kepler-1647b.

1.2.1 Astrometría de posición.

La astrometría consiste en medir con precisión la posición de una estrella en la esfera celeste, y la observación de sus cambios a través del tiempo. El movimiento de una estrella debido a la influencia de un planeta puede ser observable, sin embargo, este movimiento aparente es muy pequeño; por lo que este método para detectar exoplanetas no ha sido muy productivo hasta el momento.

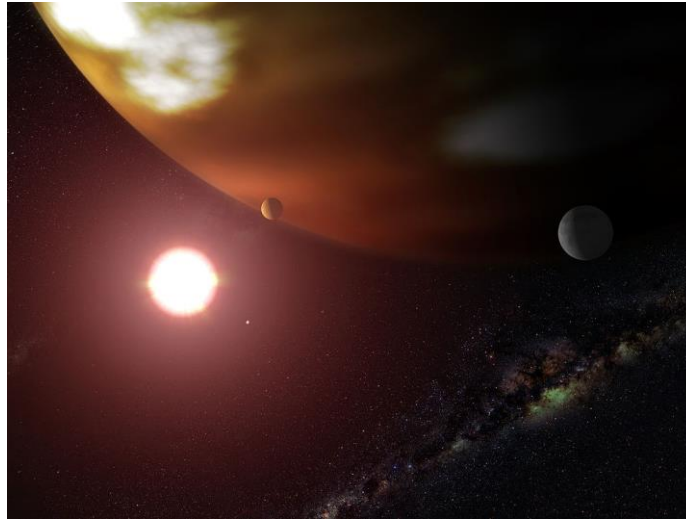


Figura 1.2 Impresión artística del planeta Gliese - 876b y su estrella. Imagen Crédito: NASA/G.

Es conveniente aclarar que esta técnica es utilizada con éxito para investigar las propiedades de los planetas encontrados por otros métodos, por ejemplo, en 2002, mediante el Telescopio Espacial Hubble de la NASA se caracterizó el planeta extrasolar Gliese-876b (Figura 1.2) (Benedict, McArthur, Harrison, et al. 2002), previamente descubierto por el método de velocidad radial.

La astrometría espacial fue firmemente establecida por la misión Hipparcos (ESA, Agencia Espacial Europea, por sus siglas en inglés) la cual, mientras estuvo en funciones (1989-1992) produjo un catálogo estelar con más de 120 000 estrellas, con paralajes ^[4] y movimientos propios ^[5] muy precisos (Perryman, Lindegren, Kovalevsky, et al. 1997). Sin embargo, la misión Hipparcos no poseía la precisión necesaria para determinar las orbitas astrométricas de la mayoría de los planetas conocidos. Sin lugar a duda la detección de exoplanetas por el método de astrometría esta puesta en el satélite GAIA de la ESA, el cual realizará un mapa del cielo con alrededor de un billón de objetos estelares, con magnitudes visibles de 6 a 10 (Perryman, 2001, de Bruijne 2012, Fisher, 2015). De tal manera, se espera que GAIA añada la astrometría a la lista de técnicas eficientes para la detección y estudio de exoplanetas; así como entender sus mecanismos de formación. GAIA comenzó sus operaciones en Julio

de 2014, y el 14 de septiembre de 2016, se publicó el primer catálogo estelar; determinando el brillo y la posición exacta en el firmamento de 1.142 millones de estrellas (Gaia Collaboration, 2016).

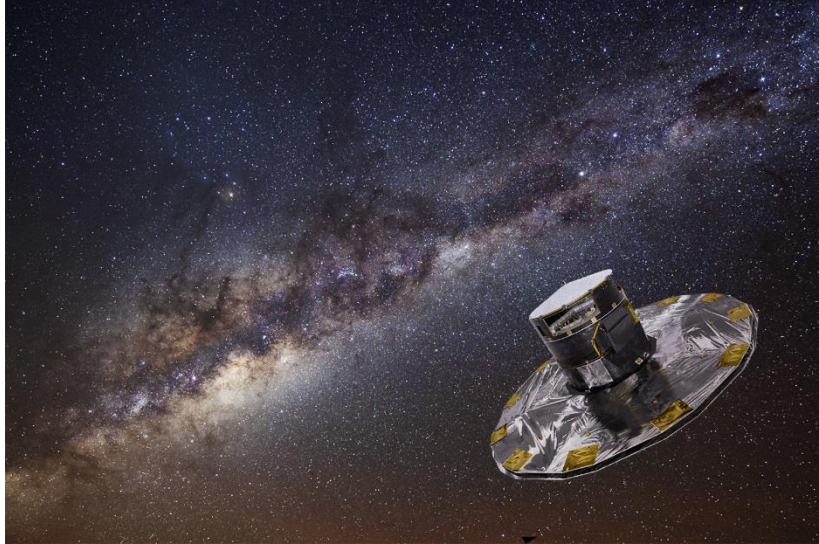


Figura 1.3 Impresión artística del satélite GAIA. Imagen Crédito: ESA Ciencia y Tecnología.

[4] Se denomina paralaje a la desviación angular aparente de un objeto, en este caso una estrella, dependiendo el punto de vista elegido.

[5] El movimiento propio es el pequeñísimo desplazamiento de una estrella con respecto a otras, causado por el movimiento de cada una en el espacio.

1.2.2 Microlentes Gravitacionales.

Desde hace varios años se han realizado campañas para observar eventos de microlente en el bulbo galáctico, esto con el fin de encontrar materia oscura y planetas extrasolares (Irwin, Patrick, 2008). El microlente se produce cuando el campo gravitacional de una estrella actúa como una lente magnificando la luz de una estrella de fondo brillante; de tal manera, que planetas orbitando a la estrella lente pueden causar anomalías detectables en la amplificación de la fuente de fondo, debido a que esta es función del tiempo. A diferencia de otros métodos que tienen el sesgo de detección hacia planetas con orbitas pequeñas, el método de microlente es más sensible para la detección de planetas con semiejes mayores que oscilan en el rango de 1 a 10 UA de su estrella anfitriona. Para que el método funcione, los tres objetos (estrella lente, exoplaneta y la Tierra) tienen que estar perfectamente alineados. La principal desventaja que tiene este método es que sus detecciones no son repetibles. Hasta la fecha, se han detectado 133 exoplanetas por el método de detección de microlentes gravitacionales (Extrasolar Planet Encyclopaedia. 2016). Actualmente las principales maneras para detectar eventos de microlentes son el Experimento Óptico de Lente Gravitatoria (OGLE, por sus siglas en inglés) (Udalski, 2003) y Observaciones Astrofísicas de Microlentes (MOA, por sus siglas en inglés) (Bond, Udalski, Jaroszyński, et al. 2004). Combinando estas técnicas se descubren cerca de 2000 eventos de microlentes cada año (Fisher, 2015). De hecho, utilizando estas dos técnicas se pudo detectar el primer exoplaneta por microlentes gravitacionales, tal planeta fue denominado OGLE-2003-BLG-235 / MOA-2003-BLG-53b, el cual posee 2.6 veces la masa de Júpiter (Bond, Udalski, Jaroszyński, et al. 2004).

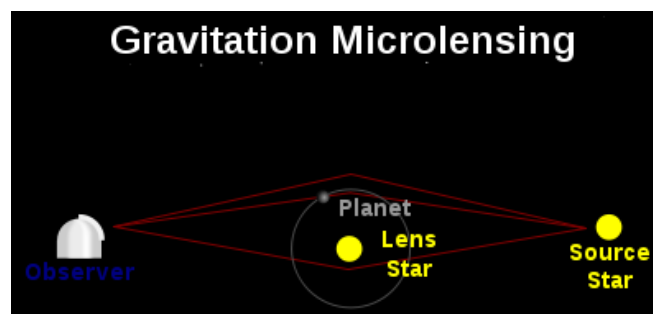


Figura 1.4 Un ejemplo de microlente gravitacional. Imagen Crédito: NASA.

Otras técnicas para la detección de exoplanetas son:

- Medidas de pulsos de radio en un pulsar.
- Perturbaciones gravitacionales en discos de polvo.
- Variación en el tiempo de tránsito (VTT).

Ahora, de acuerdo con The Extrasolar Planets Encyclopaedia, hasta el día en el cual se están escribiendo estas líneas (13 de enero de 2021) se han descubierto un total de 4404 exoplanetas. El número de planetas extrasolares descubiertos en base a su técnica de detección se muestra en la Tabla 1.1.

Método de Detección	Número de exoplanetas
Velocidad radial o Astrometría	912
Tránsitos Planetarios	3129
Microlentes gravitacionales	133
Medida de pulsos	45
Variaciones en el tiempo de tránsitos	20
Imagen directa	143

Tabla 1.1 Número de exoplanetas descubiertos en base a su técnica de detección.

1.2.3 El Método de Velocidad Radial.

Según Tenorio Tagle y Muñoz- Tuñón (2004), la espectroscopía se define como el estudio de la posición, intensidad y perfil de las líneas de emisión y absorción que aparecen en un espectro de luz. Esta técnica observacional nos provee de un método para detectar planetas denominado Espectroscopía Doppler, también conocido como Método de Velocidad Radial.

Las primeras detecciones de planetas por espectroscopía Doppler fueron tomadas con escepticismo (Fisher, 2015). En el año de 1988, Campbell, B., Walker, G. A. H., Yang, S., et al., identificaron variaciones en las velocidades residuales de γ Cep, una componente de un sistema de estrellas binarias; no obstante, estas variaciones en su momento atribuidas a señales de actividad estelar, hasta que 15 años después datos adicionales confirmaron que estas variaciones eran causadas por un planeta (Hatzes, Cochran, Endl, et al 2003). En 1989, Latham, Stefanik, Mazeh, et al., detectaron una señal Doppler alrededor de la estrella HD 114762, con un periodo orbital de 84 días y una masa proyectada $M_p \sin(i) = 11 M_J$. Dado que la inclinación orbital era desconocida, se esperaba que la masa pudiera ser significativamente grande; de tal manera que se interpretaron los datos como una probable enana marrón. Cuando Mayor y Queloz (1995) modelaron un corrimiento Doppler en sus datos para una estrella tipo solar (51 Pegasi), como un planeta con masa parecida a la masa de Júpiter, orbitado a la estrella en 4.23 días; los astrónomos se cuestionaron si este comportamiento podría ser un modo desconocido en ese entonces de oscilaciones estelares (Gray, 1997) o de pulsaciones no radiales (Gray y Hatzes, 1997).

Fue prácticamente hasta el año 2000 cuando se confirmó mediante el primer tránsito planetario, un planeta inicialmente detectado por velocidad radial (Henry, Marcy, Butler, et al. 2000 y Charbonneau, Brown, Latham, et al. 2000); también se detectó el primer sistema multiplanetario Upsilon Andromedae (Butler, Marcy, Fischer, et al. 1999). Con estos acontecimientos quedo firmemente establecido el método de velocidad radial (mvr). La precisión Doppler mejoró desde valores de 10ms^{-1} en 1995 a 3ms^{-1} en 1998 y hasta cerca de 1ms^{-1} en 2005 con HARPS (acrónimo de Buscador de Planetas por Velocidad Radial de Alta Precisión) (Mayor, et al. 2003), y SOPHIE (Espectrógrafo para la observación de los interiores estelares y de exoplanetas). Una precisión Doppler o resolución espectral, de 1ms^{-1} corresponde a corrimientos de líneas estelares a través de 1/1000 de un píxel de una cámara CCD (Charge Coupled Device, por sus siglas en inglés). Esto es un acto de medición que requiere:

- Alta razón señal a ruido.

- Alta resolución Espectral.
- Cobertura espectral amplia, en términos de las longitudes de onda del espectro electromagnético.

Los espectrógrafos Echelle típicamente proveen estas características y han servido como instrumentos de trabajo diseñados para la búsqueda de planetas por el Método de Velocidad Radial.

El efecto Doppler se manifiesta cuando los objetos en movimiento emiten luz, con corrimientos a distintas frecuencias (Conway, Gilmour, Jones, et al. 2011). Esto ayuda para conocer la velocidad de los objetos astronómicos que se están moviendo con respecto a nosotros, de manera que:

- Si un objeto se está acercando hacia nosotros, la longitud de onda tendrá valores más pequeños. Es decir, un corrimiento al azul (blue shift).
- Si un objeto se está alejando de nosotros, la longitud de onda tendrá valores más grandes. En otras palabras, tendrá un corrimiento al rojo (red shift).

Los dos corrimientos en la longitud de onda se ilustran en la Figura 1.5.

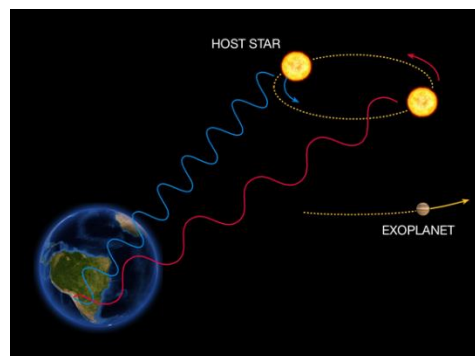


Figura 1.5 El Método de Velocidad Radial. Imagen Crédito: ESO (Observatorio Europeo del Sur, por sus siglas en inglés).

El tamaño del corrimiento es proporcional a la velocidad a la cual se está moviendo el objeto cuando se acerca o se aleja de nosotros. El cambio en la longitud de onda $\Delta\lambda$ observada causado por un objeto moviéndose a una velocidad v_r está dado por:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} \quad (1.1)$$

Donde c es la velocidad de la luz en el vacío. De la ecuación 1.1, si:

- v_r y $\Delta\lambda$ son positivas si el objeto se está alejando de nosotros.
- v_r y $\Delta\lambda$ son negativas si el objeto se está acercando a nosotros.

Usualmente la medición de la longitud de onda inicial de la estrella se hace utilizando una línea espectral observada. Esta línea espectral, se considera como una fuente estacionaria en la Tierra (λ_0), y es comparada con una línea espectral de una fuente estacionaria pero medida en el laboratorio (λ). La diferencia entre ambas produce $\Delta\lambda$, el corrimiento de la longitud de onda.

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 \quad (1.2)$$

Es conveniente aclarar que v_r no es simplemente la velocidad del objeto; se debe de considerar como la componente de la velocidad del objeto a lo largo de la línea de visión o a la proyección de la velocidad de la estrella en la línea de visión; a esta velocidad usualmente se le conoce como velocidad radial. Esta velocidad depende de la inclinación entre el plano orbital y la línea de visión desde la Tierra (Figura 1.6).

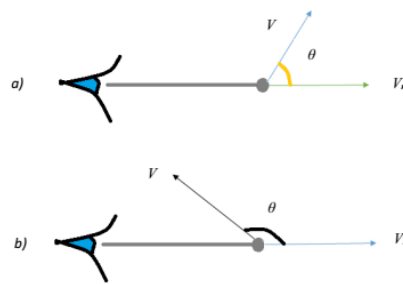


Figura 1.6 Efecto Doppler, corrimientos gravitacionales. a) Objeto alejándose de la Tierra. "Red shift" $\theta < 90^\circ$, $v_r > 0$. b) Objeto acercándose a la Tierra. "Blue shift" $\theta > 90^\circ$, $v_r < 0$.

De modo que la velocidad radial es la componente horizontal de la velocidad verdadera del objeto v :

$$v_r = v \cos \theta \quad (1.3)$$

Por lo tanto, si $\theta = 90^\circ$, el valor de v_r será máximo, es decir, la velocidad verdadera del objeto será perpendicular a la línea de visión. Así que, si $\theta = 90^\circ$, el valor de v_r será cero, entonces, la velocidad verdadera del objeto será paralela a la línea de visión. Este comportamiento se ilustra en la Figura 1.7.

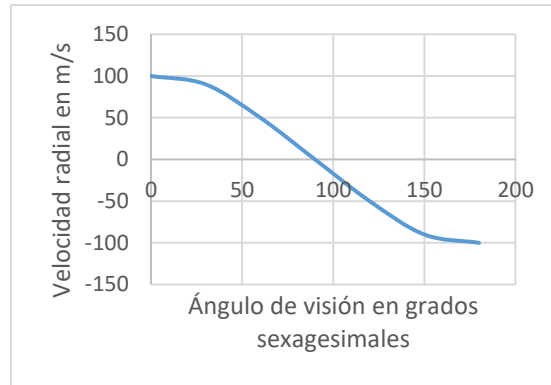


Figura 1.7 Grafica de velocidad radial v_r vs ángulo de línea de visión θ , para una velocidad constante de 100ms^{-1} .

La causa de los corrimientos Doppler en las líneas espectrales de la binaria, se deben al movimiento de la estrella alrededor de su centro de masa. Por consiguiente, cuando la estrella se aleja de nosotros, las líneas espectrales se moverán hacia longitudes de onda más largas, y cuando la estrella se acerque a nosotros, las longitudes de onda serán más cortas. Este movimiento orbital de la estrella alrededor de su centro de masa es periódico; así que, al referirnos a la velocidad radial, esta será de la estrella. Consideremos el caso de la estrella 51 Pegasi, cuyas mediciones de velocidad radial se muestran en la Figura 1.8.

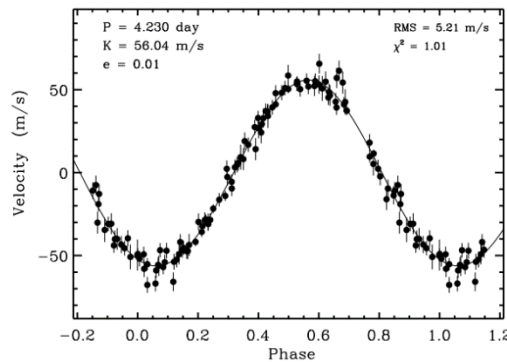


Figura 1.8 Mediciones de velocidad radial v_r para 51 Pegasi. Imagen Crédito: Marcy, G. et al. *The Astrophysical Journal* 481:926-935, Junio 1 de 1997.

De la figura 1.8, tenemos que:

- 51 Pegasi, es observada mostrando corrimientos periódicos de longitudes de onda. Por lo tanto, podemos realizar un estimado de la velocidad radial máxima.
- La máxima velocidad radial observada puede estimarse entre 50ms^{-1} y 60ms^{-1} . El periodo del planeta sospechoso será igual a un periodo completo de la estrella. Esto puede ser medido usando análisis del espectro de frecuencias, para este caso es aproximadamente de 4 días.

El análisis anterior solo es aplicable para una órbita circular del sistema estrella-exoplaneta desde nuestra línea de observación. En el caso de que la órbita circular se presente con un cierto ángulo de inclinación respecto a nuestra línea de visión debemos considerar lo siguiente:

- **Situación 1.** El máximo y mínimo de la velocidad radial corresponderá a las veces en que la estrella se esté directamente alejándose y acercándose a nosotros respectivamente. Por esta razón, la máxima velocidad radial será igual a la velocidad orbital de la estrella, para nuestra línea de observación. Esto se puede observar en la Figura 1.9.

$$v_r = v_* \quad (1.4)$$

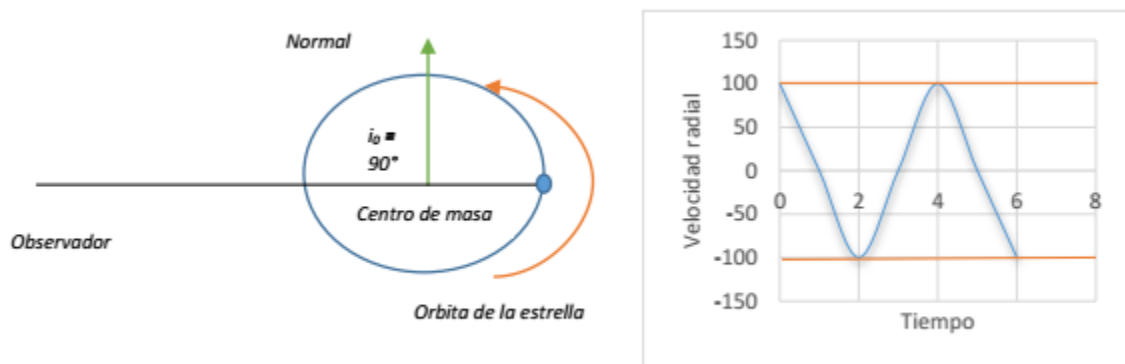


Figura 1.9 Esquema que representa la situación 1.

- **Situación 2.** Para esta situación debemos considerar el ángulo de inclinación θ_I con respecto a nuestra línea de visión, esto implica que en la ecuación 1.3, al multiplicar la velocidad verdadera v por el coseno de θ_I , el valor de la velocidad radial será siempre menor o igual que la velocidad de la estrella. La Figura 1.10 ilustra gráficamente lo explicado en la situación 2.

$$v_r \leq v_* \quad (1.5)$$

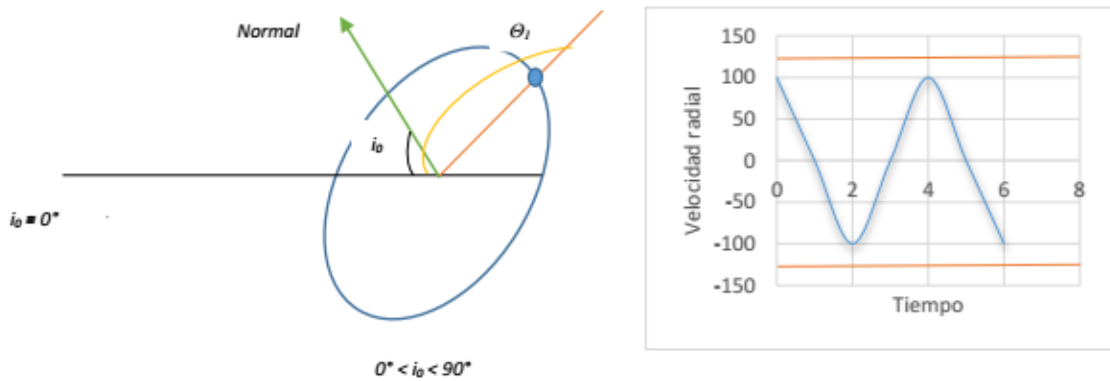


Figura 1.10 Esquema que representa la situación 2.

- **Situación 3.** En este caso no se presenta variación de velocidad radial. De hecho, la velocidad radial siempre es cero, o no se puede medir (Figura 1.11).

$$v_r = 0 \quad (1.6)$$

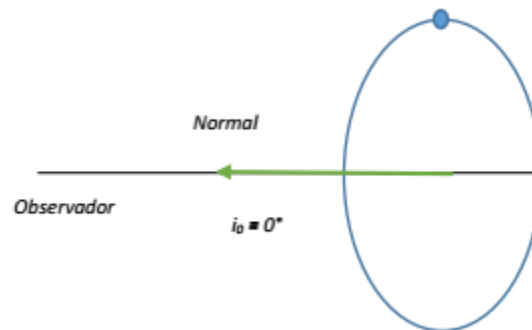


Figura 1.11 Esquema que representa la situación 3. Órbita de la estrella vista de canto, con respecto a la línea de visión del observador en la Tierra.

En las tres situaciones “ i_0 ” es llamada la inclinación, y se puede notar de las figuras que cuando $i_0 = 90^\circ$, tenemos la situación más favorable; en tanto, cuando $i_0 = 0^\circ$, la velocidad radial de la estrella será cero y no será posible caracterizar a un potencial planeta.

La relación entre el ángulo de inclinación con respecto a la línea de visión i_0 , y el ángulo entre la línea de visión y la velocidad de la estrella θ_1 , está dada por:

$$\theta_1 = 90^\circ - i_0 \quad (1.7)$$

Dado que en la práctica la mayoría de los astrónomos trabajan con i_0 , describiremos la ecuación 1.3 en función de i_0 , entonces para la máxima velocidad radial,

$$v_{rmax} = v_* \cos \theta_1 = v_* \cos(90^\circ - i_0)$$

$$v_{rmax} = v_* \sin i_0 \quad (1.8)$$

Ahora vamos a considerar la Figura 1.12, en donde se muestran la estrella (S) y el planeta (P) en cuatro posiciones igualmente espaciadas (1, 2, 3 y 4).

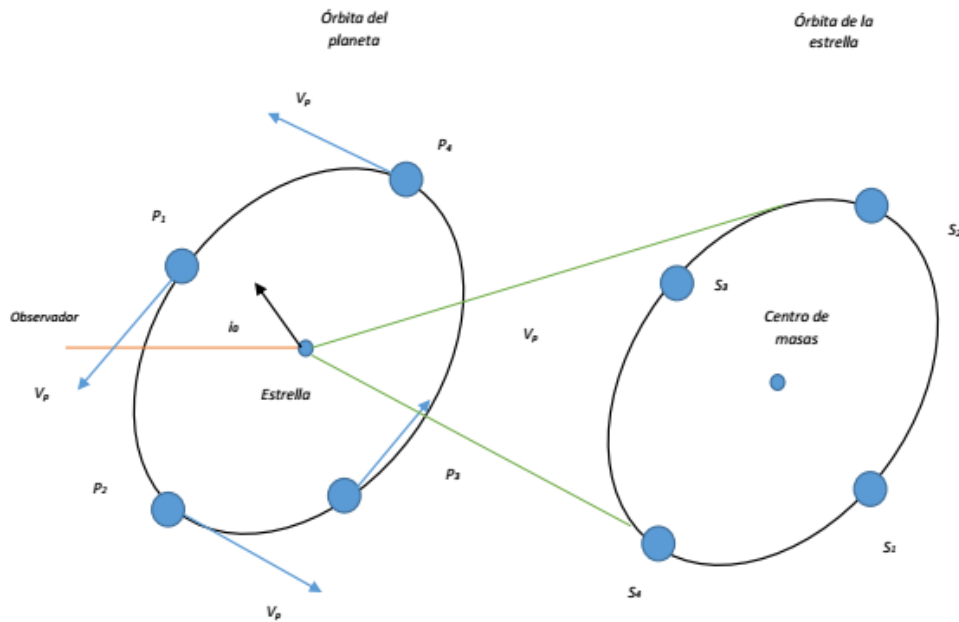


Figura 1.12 Esquema que representa las posiciones de la estrella y el planeta en sus respectivas órbitas, con respecto al centro de masas.

De la Figura 1.12, se puede concluir que cuando el planeta y la estrella están en las posiciones P_1 y S_1 respectivamente, la velocidad radial será máxima, esto se ilustra en la Figura 1.13.

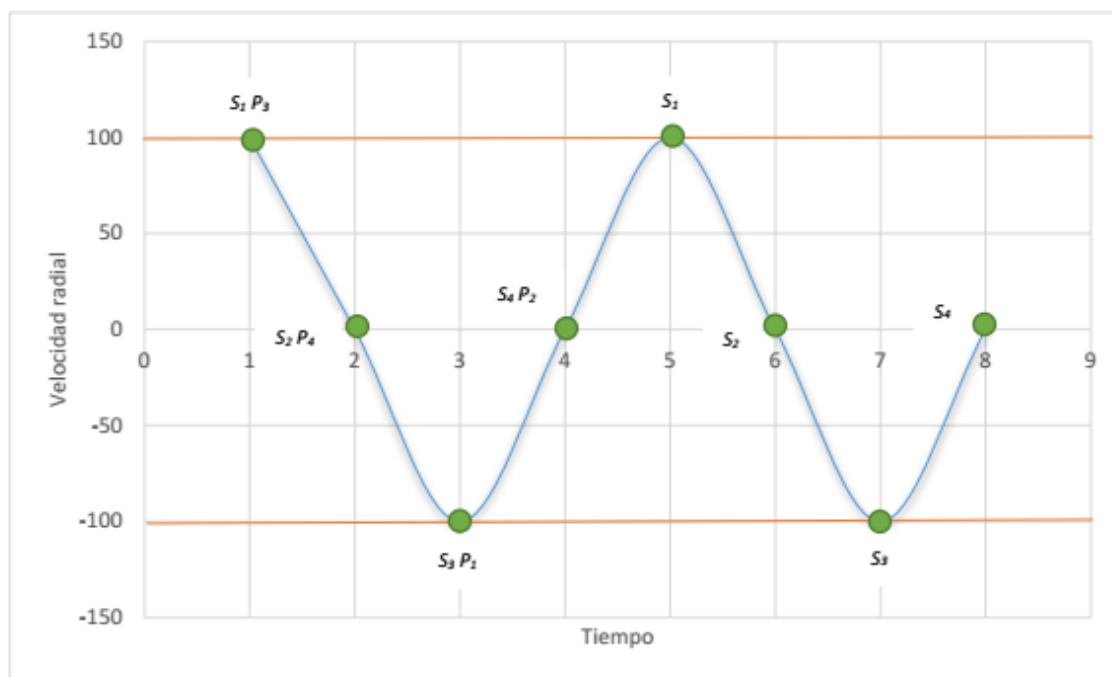


Figura 1.13 Gráfico que muestra los puntos en donde se localizan la estrella y el planeta, para obtener una velocidad radial máxima. La cota superior equivale a $v_* \sin i_0$ y la cota inferior equivale a $-v_* \sin i_0$.

Finalmente es importante tener en cuenta que la máxima velocidad radial, referida como $v_* \sin i_0$, es el límite más bajo de la verdadera velocidad orbital.

Ahora analicemos como pasar de las cantidades observables, como lo son la velocidad radial y el periodo, a las propiedades del sistema: el semieje mayor y la masa. Para esto, vamos a utilizar a 51 Pegasi (Mayor y Queloz, 1995), el primer exoplaneta descubierto por el método de velocidad radial para ilustrar este procedimiento.

Supongamos que el sistema 51 Pegasi tiene una órbita circular (excentricidad: 0.013 ± 0.012). El periodo orbital de la estrella y el planeta es $P = 4.23$ días y el máximo de velocidad radial es 57.9 ms^{-1} . En una órbita circular, la velocidad orbital v_* es constante y el periodo está

definido como el tiempo que toma completar una órbita. La distancia recorrida por el sistema en una órbita puede ser igual a una circunferencia, es decir, el perímetro de un círculo: $2\pi a_*$.

Utilizando la expresión clásica del movimiento rectilíneo uniforme (v_* es constante) tenemos:

$$v_* = \frac{D}{t} \quad (1.9)$$

donde D es la distancia recorrida por el sistema o perímetro de la circunferencia y es igual a $2\pi a_*$, el tiempo es equivalente al periodo orbital, entonces:

$$v_* = \frac{2\pi a_*}{P} \quad (1.10)$$

donde a_* es el radio orbital, despejando de la ecuación 1.10 nos queda:

$$a_* = \frac{v_* P}{2\pi} \quad (1.11)$$

En este punto hay que reconocer que no tenemos forma de determinar v_* , porque no conocemos la inclinación. Así que, vamos a aceptar el hecho de que solo tenemos el valor de $v_* \sin i_0$ y tratar de colocar un límite en el radio orbital de la órbita de la estrella. Si multiplicamos la ecuación 1.11 por $\sin i_0$,

$$a_* \sin i_0 = \frac{v_* \sin i_0 P}{2\pi} \quad (1.12)$$

Entonces podemos obtener $a_* \sin i_0$ conociendo únicamente el valor de $v_* \sin i_0$ que es igual al máximo de la velocidad radial, esto es,

$$a_* \sin i_0 = \frac{(57.9 \text{ ms}^{-1})(365472 \text{ s})}{2\pi} = 3.37 \times 10^6 \text{ m} \quad (1.13)$$

de tal manera que $a_* \sin i_0$ es el límite inferior del radio orbital de la estrella a_* , alrededor del centro de masa.

La información que podemos obtener a partir de observaciones espectroscópicas es:

- El periodo, P .
- El límite más bajo de la velocidad orbital de la estrella, $v_* \sin i_0$.
- El límite más bajo del radio orbital de la estrella, $a_* \sin i_0$.

Ahora vamos a estimar la masa del planeta y su radio orbital; para esto necesitamos primero estimar la masa de la estrella. Un método es a través de la relación masa-luminosidad de las estrellas, que para el caso de estrellas de la secuencia principal es $L \propto r^3$ (Prialnick, 2000), de tal modo que utilizaremos la siguiente regla:

$$\frac{L_*}{L_\odot} = \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)^3 \quad (1.14)$$

donde L_\odot y M_\odot son los valores de referencia, para la luminosidad y masa del Sol respectivamente. L_* se calcula por medio de la expresión

$$L_* = 4\pi d^2 F_* \quad (1.15)$$

donde d es la distancia a la cual nos encontramos de la estrella y F_* es el flujo de radiación colectada por el instrumento de medición. Al realizar un poco de algebra en la ecuación 1.14, encontramos que la masa de la estrella se puede determinar mediante la expresión:

$$M_* = \left(\frac{L_*}{L_\odot}\right)^{1/3} M_\odot \quad (1.16)$$

El siguiente paso es encontrar el radio orbital o semieje mayor del planeta, para lograr esto, vamos a utilizar la Tercera Ley de Kepler del Movimiento Planetario

$$P^2 = 4\pi^2 \left(\frac{a_p^3}{GM_*} \right) \quad (1.17)$$

donde G es la constante de Gravitación Universal, cuyo valor en el Sistema Internacional de Unidades es $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{Kg}^{-2}$. Despejando la ecuación 1.17 para a_p tenemos:

$$a_p = \left(\frac{GM_* P^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \quad (1.18)$$

volviendo a nuestro caso de 51 Pegasi, siendo la masa del Sol M_\odot igual a 1.99×10^{30} Kg, obtenemos un valor para el semieje mayor del planeta de:

$$a_p = 7.66 \times 10^9 \text{ m} \quad (1.19)$$

convirtiendo a unidades astronómicas ($1\text{UA} = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$), se llega al radio orbital de $a_p = 0.051 \text{ UA}$. Si comparamos este valor obtenido con el de Mercurio ($a_p = 0.39 \text{ UA}$), llegamos a la conclusión de que el planeta alrededor de 51 Pegasi está 7.6 veces más cerca de su estrella anfitriona, que Mercurio del Sol.

Dado que previamente se había encontrado el límite inferior del radio orbital, $a_* \sin i = 3.37 \times 10^6 \text{ m}$, utilizaremos el concepto de centro de masa del sistema estrella-planeta para determinar la masa, M_p , del planeta; tal relación está dada por la ecuación 1.20 (Prialnick, 2000).

$$M_p = \frac{a_*}{a_p} M_* \quad (1.20)$$

De nuevo tenemos que multiplicar por $\sin i_0$, por la misma razón que para el caso de V_* :

$$M_p \sin i_0 = \frac{a_* \sin i_0}{a_p} M_* \quad (1.21)$$

Donde $M_p \sin i_0$ es el límite inferior de la masa del planeta. Sustituyendo los valores conocidos de $a_* \sin i_0$ y a_p , además de por medio de la ecuación 1.16, la masa de 51 Pegasi fue estimada en $1.06 M_\odot$, obtenemos:

$$M_p \sin i_0 = 8.75 \times 10^{26} \text{ Kg} \quad (1.22)$$

Ahora para comparar el límite inferior de la masa del planeta con Júpiter, por ejemplo, dividimos esta cantidad entre la masa de Júpiter, $M_J = 1.899 \times 10^{27} \text{ Kg}$ (Armitage, 2010) y llegamos al valor de

$$\frac{8.75 \times 10^{26} \text{ Kg}}{1.899 \times 10^{27} \text{ Kg}} = 0.46 \quad (1.23)$$

Es decir, el límite inferior de la masa del planeta 51 Pegasi b es 0.46 veces la masa de Júpiter. Por lo tanto, la masa del exoplaneta debe ser de al menos $0.46 M_J$. En este instante podemos asumir con toda certeza que el planeta que orbita cercanamente a la estrella 51 Pegasi no es un planeta pequeño tipo Mercurio, sino que es un planeta gigante comparable en masa con Júpiter. A pesar de que esto pudiera parecer una sorpresa, un poco más de matemáticas revela que es exactamente este tipo de planetas (conocidos como Júpiteres calientes), los que la espectroscopía Doppler puede más fácilmente detectar. La razón es simplemente que las observaciones se realizan más fácilmente en estrellas que presentan grandes variaciones en la velocidad radial, que por supuesto, está estrechamente relacionada con la velocidad de la estrella.

Como ya lo vimos, la velocidad orbital de las estrellas está dada por la ecuación 1.10:

$$v_* = \frac{2\pi a_*}{P}$$

sustituyendo en esta, la ecuación 1.17 y a_* usando la ecuación 1.21 llegamos a la expresión:

$$v_* = \left(\frac{G}{M_*} \right)^{1/2} \frac{M_p}{a_p^{1/2}} \quad (1.24)$$

de esta última relación, es importante considerar que para planetas masivos (mayor M_p), la velocidad orbital de la estrella será más grande; además de que estos planetas masivos están orbitando muy cerca de su estrella (pequeño a_p). Por esta razón, la espectroscopía Doppler es el método más utilizado para buscar exoplanetas masivos que tienen semiejes mayores pequeños. Armitage (2010) indica que para aplicaciones reales es necesario

considerar la magnitud de la velocidad radial por planetas en órbitas excéntricas. La forma de obtener la velocidad radial en estos casos es:

$$v_* = K[\cos(T + \tilde{\omega}) + e\cos\tilde{\omega}] \quad (1.25)$$

Como más adelante lo definiremos (capítulo 2), T es la anomalía verdadera, $\tilde{\omega}$ es el ángulo en el plano orbital entre el pericentro y la línea de visión del sistema. K es la semiapertura del sistema y se obtiene a partir de:

$$K = v_* \sin i_0 = \left(\frac{M_p}{M_*} \right) \sqrt{\frac{GM_*}{a_*}} \sin i_0 \quad (1.26)$$

Cuando los exoplanetas comenzaron a ser descubiertos en la década de 1990, la mayoría de ellos fueron encontrados por espectroscopía Doppler. Sin embargo, con el lanzamiento del satélite Kepler de la NASA, la detección de exoplanetas por el Método de Tránsitos fue ganando terreno rápidamente; y aunque la espectroscopía Doppler no observa directamente al planeta, es un método que se complementa con otros para conocer la naturaleza física de un planeta extrasolar.

1.2.4 Método de Tránsitos Planetarios. El efecto que tiene un planeta sobre la fotometría de su estrella.

A inicios del nuevo milenio se anunció el descubrimiento del primer planeta extrasolar, detectado por el método de tránsitos, HD 209458b (Henry, Marcy, Butler, et al. 2000 y Charbonneau, Brown, Latham, et al. 2000). Sin embargo, a mediados de la década de 2000, apenas se habían detectado nueve planetas por el método de tránsitos y casi 200 por el método de velocidad radial (Charbonneau, D., Blake, C. H., White, R. J., et al. 2007); no obstante, en los últimos años, el campo de detección de exoplanetas por el método de tránsitos se ha incrementado dramáticamente (más de 4000).

Proyectos para la búsqueda de exoplanetas instalados en la Tierra como SuperWASP⁶ (Collier C. A., Wilson, D. M., West, R. G., et al. (2007) y HATnet⁷ (Bakos, Shporer, Pál, et al.

(2007), por citar ejemplos han descubierto docenas de planetas en tránsito con curvas de luz de alta calidad, que, a su vez complementadas con el método de velocidad radial, han permitido obtener la masa de esos planetas. Mediante los telescopios espaciales, miles de exoplanetas se han detectado por el método de tránsitos, por ejemplo:

- El telescopio espacial Spitzer, se ha empleado para caracterizar las atmósferas de decenas de exoplanetas en tránsito (Seager y Deming, 2010).
- La Misión Kepler, en particular ha sido completamente exitosa, habiendo generado más detecciones. En el año 2011, se tenía más de un centenar de planetas con las determinaciones de masas, así como cientos de ejemplos de varios planetas en tránsito orbitando alrededor de una sola estrella anfitriona, muchos de los cuales son sistemas multiplanetarios coplanares (Lissauer, 2011).

Para que un planeta pueda ser detectado por el método de tránsitos, la estrella, el planeta y el observador deben de estar perfectamente alineados. Los tránsitos tanto estelares (una sola estrella o sistemas binarios) como planetarios, se manifiestan en una disminución de la radiación que proviene de la fuente de emisión; y esto se puede visualizar en una caída poco profunda de lo que astrofísicamente se denomina *curva de luz* (Figura 1.14). La combinación de este método con la espectroscopía Doppler, permite determinar la masa, el radio y por consiguiente la densidad de un planeta (Moutou y Pont, 2005).

[6] El proyecto SuperWASP (Wide Angle Search for Planets, por sus siglas en inglés), es una búsqueda automatizada de exoplanetas a través del método de tránsitos. Su objetivo final es cubrir todo el firmamento, analizando estrellas de hasta magnitud 15.

[7] HATnet (Hungarian Automated Telescope Network, por sus siglas en inglés), es un proyecto astronómico para la búsqueda de exoplanetas, basados en el método de tránsitos.

Un sistema planetario observado de canto es una configuración específica e interesante para detectar los tránsitos planetarios. Tal es el caso, que los planetas pueden transitar la estrella y causar ocultaciones, las cuales son detectables por la medición de flujo continuo de la estrella (Olliver, Encrenaz, Roques, et al., 2009). Cuando se mide la amplitud de la extinción del flujo de radiación proveniente de la estrella, nos permite conocer el diámetro del planeta. También, cuando se conoce la duración del tránsito y la periodicidad del mismo, nos lleva a su vez a encontrar el periodo orbital del planeta y la distancia a su estrella madre, es decir, su semieje mayor. Por lo tanto, la observación de un tránsito planetario es posible si y solo si, el sistema se puede observar si su vista está muy cerca de la de canto y perpendicular a la línea de visión.

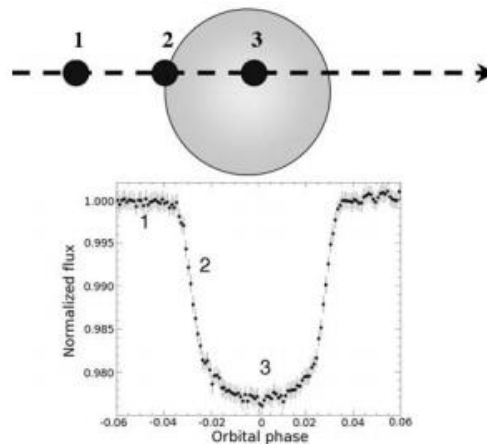


Figura 1.14 Diagrama que ilustra los principios de un tránsito planetario frente a una estrella, y la fotometría asociada curva de luz. Crédito de la imagen. Olliver, M. et al. 2009. *Planetary Systems*.

Comencemos con la probabilidad de obtener un tránsito, para esto vamos a considerar la ilustración de la Figura 1.15.

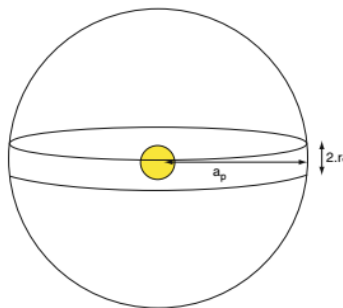


Figura 1.15 La geometría para observar un tránsito planetario. Crédito de la imagen. Olliver, M. et al. 2009. *Planetary Systems*.

De este bosquejo, el tránsito del planeta solo será visible si la línea de visión intercepta el cilindro construido sobre la órbita. El cilindro tiene dimensiones de radio a_p y altura $2r_*$. Asumiendo que la orientación de los sistemas planetarios con respecto al plano celeste es uniforme, la probabilidad p_T de observar un tránsito se expresa como la relación entre la superficie del cilindro que acabamos de describir a la esfera de radio a_p . Donde la superficie del cilindro representa el número total de observaciones favorables a la línea de visión, y la esfera de radio a_p representa el número total de posibles orientaciones a la línea de visión. Para una órbita circular esta relación se expresa de la siguiente forma:

$$p_T = \frac{(2\pi a_p)(2r_*)}{4\pi a_p^2}$$

$$p_T = \frac{r_*}{a_p} \quad (1.27)$$

donde r_* es el radio de la estrella y a_p es el semieje mayor de la órbita del planeta. Otra forma conveniente de expresar esta relación de probabilidad es en función del periodo orbital del planeta, a partir de la Tercera Ley de Kepler tenemos:

$$p_T = \frac{r_*}{P^{2/3}} \left(\frac{4\pi^2}{Gm_*} \right)^{1/3} \quad (1.28)$$

Un análisis de las ecuaciones 1.27 y 1.28, asumiendo una esfera con radio igual al del Sol, muestra que la probabilidad de observar un tránsito disminuye rápidamente en cuanto el planeta está más lejos de su estrella, y por consiguiente también con su periodo orbital (Olliver, Encrenaz, Roques, et al., 2009), esto se puede observar en los diagramas que se muestran en la Figura 1.16.

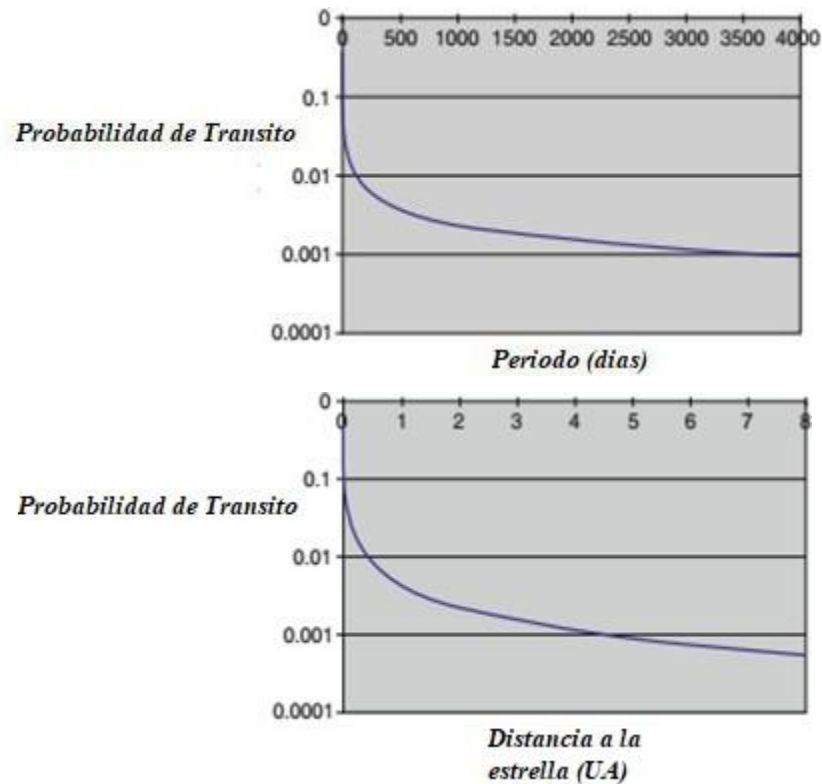


Figura 1.16 Probabilidad de un tránsito por un planeta en órbita alrededor de una estrella de tipo solar en función de su distancia de la estrella (izquierda), y su periodo orbital (derecha). Crédito de la imagen Olliver, M. et al. 2009. *Planetary Systems*.

Por lo tanto, la detección de exoplanetas mediante la observación de sus tránsitos será más favorable para planetas que se encuentren a distancias cortas de su estrella anfitriona (semiejes mayores a_p pequeños). Analicemos como ejemplo el caso de un Júpiter caliente y un planeta tipo Tierra; la probabilidad de observar un tránsito de un Júpiter caliente es aproximadamente el 10% (si el planeta tiene un periodo orbital de 3 a 4 días). Mientras que la probabilidad de observar el transito del planeta tipo Tierra (con un periodo orbital de 365 días) es de solo 0.5%.

Los tránsitos planetarios medidos en la curva de luz son descritos por tres parámetros (Moutou y Pont, 2005):

- Duración.
- Profundidad.
- Forma.

En función de la latitud del tránsito en el disco estelar, la curva de luz puede ser de dos formas (Moutou y Pont, 2005):

- Tipo U (ocultación central).
- Tipo V (ocultación lateral).

Consideremos el caso simplificado que se muestra en la Figura 1.17, en la cual se presenta una órbita circular y un disco estelar de brillo uniforme; en base a esto, calcularemos los parámetros de un tránsito planetario.

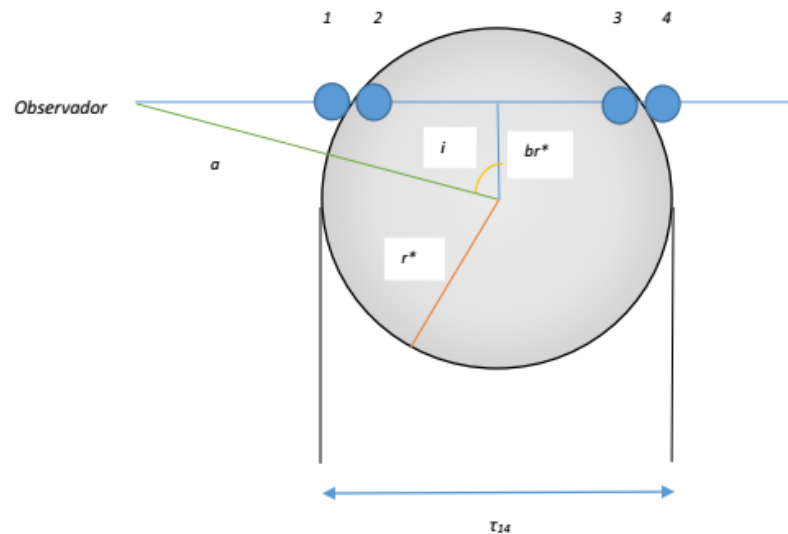


Figura 1.17 La geometría de un tránsito planetario. Donde 1, es la fase de ingreso, 2,3, son las fases de disco y 4, es la fase de egreso.

Como lo muestra la Figura 1.17, los tránsitos constan de cuatro fases:

1. El limbo del planeta (el borde de un cuerpo celeste visto por un observador situado en la Tierra) coincide con el limbo de la estrella.
2. Todo el disco del planeta ha entrado en el disco de la estrella.
3. El último instante en el cual todo el disco del planeta está dentro del disco estelar.
4. Finalmente, todo el disco del planeta ha salido completamente del disco de la estrella.

La duración de un tránsito corresponde al tiempo requerido para que el planeta atraviese la cuerda 1-4. Se define el parámetro de impacto b como la distancia media vertical a medio tránsito, que va del centro del planeta al centro de la estrella, observado en una línea de visión. Este parámetro de impacto está determinado por la inclinación de la órbita i , en relación con la línea de visión y matemáticamente se denota por la expresión

$$br_* = a_p \cos(i) \quad (1.29)$$

Ahora la duración de un tránsito y el parámetro de impacto están relacionados por la expresión que se obtiene de la figura 1.18.

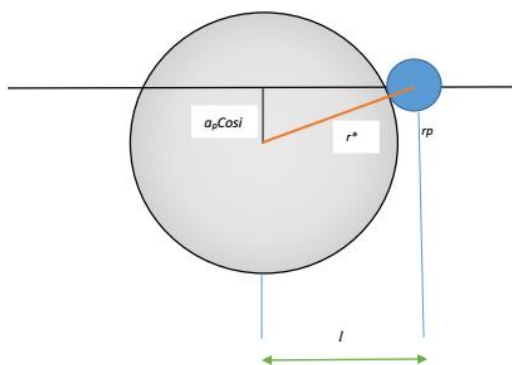


Figura 1.18 La geometría de un tránsito planetario. Relación entre el parámetro de impacto y la duración del tránsito.

De la figura 1.18 y de acuerdo con el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$l = \sqrt{(r_* + r_p)^2 - (a_p \cos(i))^2}$$

considerando que el radio de la estrella es mucho mayor que el radio del planeta, es decir, $r_* \gg r_p$:

$$l = \sqrt{(r_*)^2 - a_p^2 \cos^2(i)} \quad (1.30)$$

dado que $a_p \cos(i)$ es igual que br_* , o equivalentemente sustituir 1.29 en 1.30:

$$l = \sqrt{r_*^2 - b^2 r_*^2}$$

Al factorizar el cuadrado de la estrella, se llega a la expresión:

$$l = r_* \sqrt{1 - b^2} \quad (1.31)$$

La longitud de la cuerda que va desde la posición 1 a la 4, está dada por el doble de la ecuación 1.31, entonces:

$$l = 2r_* \sqrt{1 - b^2} \quad (1.32)$$

La velocidad para recorrer una órbita circular cualquiera es

$$v = \frac{2\pi a_p}{P} \quad (1.33)$$

donde P es el periodo en recorrer tal orbita circular y está dado por la tercera ley de Kepler,

$$P = \frac{4\pi^2 a_p^3}{Gm_*^{1/3}} \quad (1.34)$$

despejamos a_p de 1.34:

$$a_p = \left(\frac{G}{4\pi^2} \right)^{1/3} P^{2/3} m_*^{1/3} \quad (1.35)$$

Definimos la duración de un tránsito como

$$\tau_{14} = \frac{1}{v} \quad (1.36)$$

Y podemos sustituir las ecuaciones 1.31, 1.33 y 1.35 en la 1.36, manipulando algebraicamente llegamos a la expresión del tránsito planetario (Olliver, Encrenaz, Roques, et al., 2009):

$$\tau_{14} = \frac{2r_* \sqrt{1-b^2}}{Gm_*^{1/2}} a_p^{1/2} = \frac{(2\pi)^{2/3} 2r_* \sqrt{1-b^2}}{Gm_*^{1/3}} P^{1/3} \quad (1.37)$$

Las ecuaciones 1.37 pueden escribirse de forma más simple, considerando el semieje mayor a_p en unidades astronómicas, el periodo orbital en días y la masa de la estrella en masas solares, para obtener lo siguiente (Olliver, Encrenaz, Roques, et al., 2009):

$$\tau_{14} = 13 \sqrt{1-b^2} \frac{r_*}{m_*^{1/2}} a_p^{1/2} = 1.8 \sqrt{1-b^2} \frac{r_*}{m_*^{1/2}} P^{1/3} \quad (1.38)$$

En lo que respecta a la profundidad del tránsito, esta se encuentra relacionado con los radios de la estrella y del planeta (r_* y r_p , respectivamente):

$$\Delta F = \frac{F_{off} - F_{on}}{F_{off}} = \left(\frac{r_p}{r_*} \right)^2 \quad (1.39)$$

donde ΔF es la profundidad del tránsito, F_{off} es el flujo estelar observado fuera del tránsito, y F_{on} es el flujo observado durante el tránsito.

1.3 Los Sistemas Binarios y su Clasificación.

Se define un sistema binario como un sistema estelar compuesto de dos estrellas que orbitan mutuamente alrededor de un centro de masas común. De hecho, la mayoría de las estrellas en la bóveda celeste forman parte de un sistema binario. De acuerdo a su distancia de separación, las binarias se pueden clasificar de la siguiente forma (Schwarz, 2016).

- **Binarias separadas:** la separación entre ambas estrellas tiene un rango de decenas a cientos de unidades astronómicas, y un periodo orbital de decenas a miles de años (Schwarz, 2016). También se pueden clasificar como estrellas binarias donde cada componente está dentro de su lóbulo de Roche, es decir, el área donde la atracción gravitacional de la estrella en sí es mayor que la del otro componente. Las estrellas no tienen un efecto importante entre sí, y esencialmente evolucionan por separado. La mayoría de los binarios pertenecen a esta clase (Nguyen, Q. 2007). Esto se muestra en la Figura 1.19:

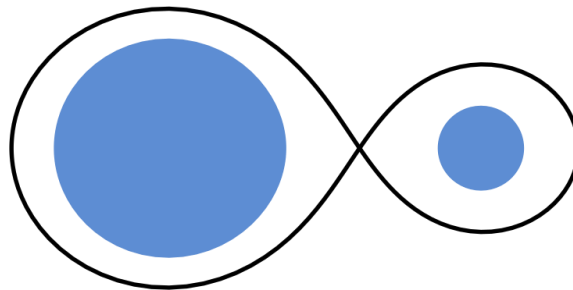


Figura 1.19 Representación gráfica de las estrellas binarias distantes.
Crédito de la imagen: Philip D. Hall.

- **Binarias cercanas:** la separación entre ambas estrellas es aproximadamente de 1UA o menos (cercana al valor del radio de las estrellas), un bosquejo de las binarias cercanas se ilustra en la Figura 1.20. En este tipo de binarias, uno de los componentes llena el lóbulo Roche de la estrella binaria y el otro no. La atmósfera de esta estrella se trasfiere a través de un proceso de acreción. La transferencia de

masa domina la evolución del sistema. Los rangos de los periodos orbitales varían desde unas pocas horas a unos pocos años (Karttunen, Kroger, Oja, et al., 2007).

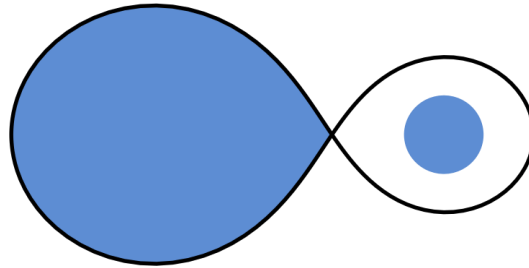


Figura 1.20 Representación gráfica de las estrellas binarias cercanas.
Crédito de la imagen: Philip D. Hall.

- **Binarias de contacto:** en este caso las estrellas están tan cercana una de otra, que mantienen contacto mutuo, como lo indica la ilustración de la Figura 1.21 (Karttunen, Kroger, Oja, et al., 2007).

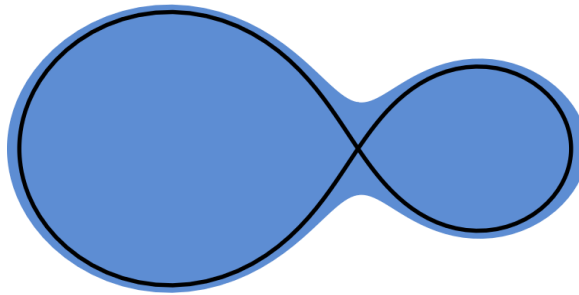


Figura 1.21 Representación gráfica de las estrellas binarias de contacto.
Crédito de la imagen: Philip D. Hall.

1.3.1 Clasificación observacional de las binarias.

Cuando observamos el cielo nocturno, muy frecuentemente dos estrellas pueden parecer bastante cercanas, a pesar de que realmente se encuentran a distancias grandes. A este tipo de sistemas binarios, se les conoce como *estrellas binarias ópticas*. Sin embargo, muchos pares cercanos de estrellas realmente están a la misma distancia y forman un sistema físico en el que dos estrellas están en órbita alrededor de la otra. Según Karttunen, Kroger, Oja, et al. (2007), menos de la mitad de todas las estrellas son solitarias como nuestro Sol. Más del 50% pertenecen a sistemas de dos o más miembros.

En general los sistemas múltiples tienen una estructura jerárquica:

- Una estrella y una órbita binaria alrededor de la otra en sistemas triples.
- Dos estrellas orbitando alrededor de un sistema binario, para los sistemas cuádruples.
- Dos sistemas binarios girando alrededor del centro de masas.

De ahí, que la mayoría de los sistemas múltiples pueden llegar a ser descritos como sistemas binarios con varios niveles.

Una taxonomía observacional de las estrellas binarias, se puede realizar utilizando como base o referencia su técnica de descubrimiento:

- **Estrellas binarias visuales:** se definen como estrellas que aparentan ser dobles cuando son vistas a través de un telescopio (Echevarría, 2002). La separación entre las estrellas es mayor que aproximadamente un 0.1 segundos de arco; y la posición relativa de sus componentes cambia a medida que avanzan en sus orbitas (Figuras 1.22 y 1.23) (Hilditch, 2001).

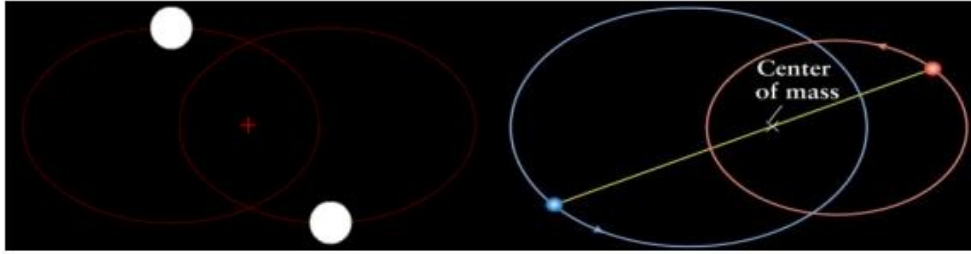


Figura 1.22 Representación de dos estrellas binarias visuales orbitando a un centro de masas común. Crédito de la imagen: Olguín, R. L. Introducción a la Astronomía. Universidad de Sonora.

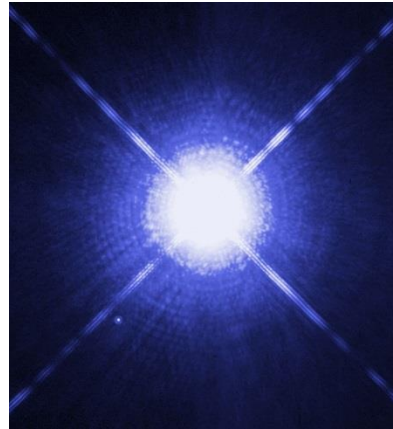


Figura 1.23 Imagen de la estrella binaria visual Sirio, tomada por el telescopio espacial Hubble. Se pueden distinguir con facilidad los dos miembros del par binario. Crédito de la imagen: NASA, ESA, H. Bond (STScI), and M. Barstow (University of Leicester).

- **Estrellas binarias astrométricas:** en este caso solo un componente es visible, pero debido a variaciones en el movimiento propio de esa componente, se infiere la presencia de la otra componente del sistema binario, esto se muestra en la Figura 1.24.

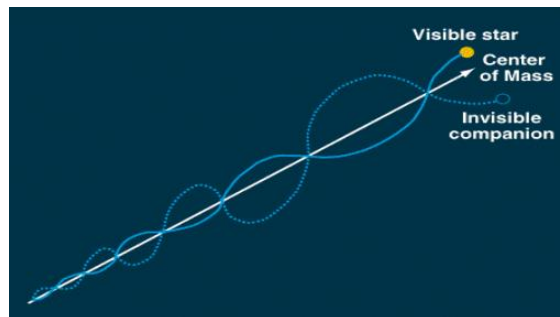


Figura 1.24 Representación de dos estrellas binarias astrométricas orbitando a un centro de masas común. Este método se ha utilizado sin mucho éxito hasta ahora para encontrar planetas cercanos al sistema binario. Crédito de la imagen: Olguín, R. L. Introducción a la Astronomía. Universidad de Sonora.

- **Estrellas binarias espectroscópicas:** Estas son descubiertas en base a sus espectros. Cualesquiera de estos dos conjuntos de líneas espectrales son visibles, o en su defecto, los corrimientos por efecto Doppler observados en las líneas, son indicadores de la presencia de un compañero invisible (Figura 1.25).

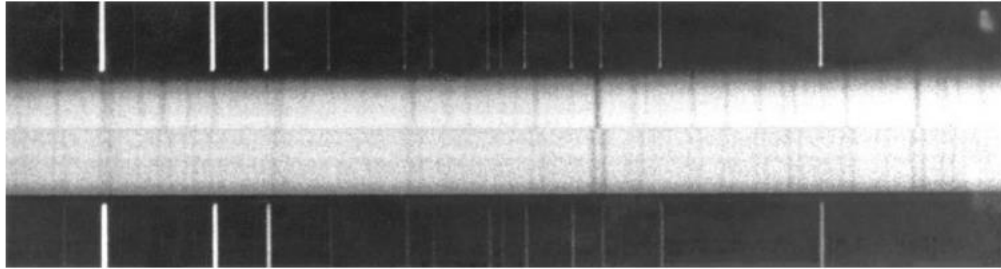


Figura 1.25 Espectro de la binaria espectroscópica Arietis κ . En el espectro superior de las líneas espectrales son individuales, en el inferior son duplicadas. Crédito de la imagen: Observatorio Lick. Karttunen, H. et al. 2006.

- **Estrellas binarias fotométricas:** Aquí las componentes estelares del sistema binario pasan o realizan tránsitos periódicamente una frente a la otra, provocando un cambio en el flujo de radiación que llega al detector. La curva de luz de una binaria fotométrica muestra variaciones en brillo muy particulares, y tales curvas de luz se clasifican en Tipo Algol, β Lyrae y W Ursa Majoris (Figura 1.26) (Schwarz, 2016).

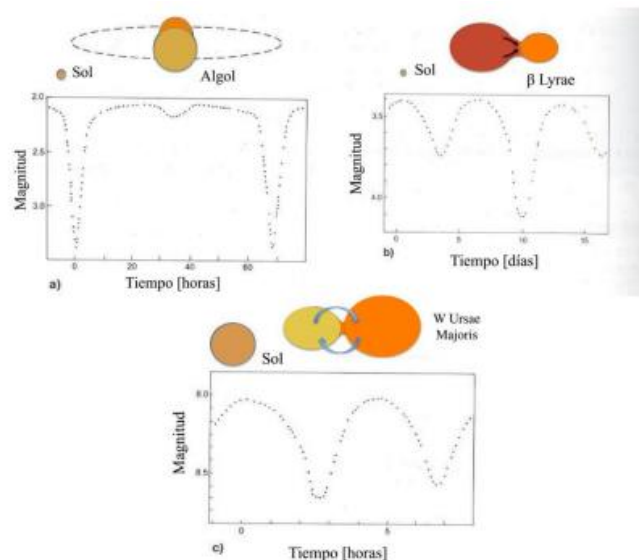


Figura 1.26 Curvas de luz para binarias fotométricas, a) Tipo Algol, b) Tipo β Lyrae y c) W Ursa Majoris. Crédito de la imagen: Olguín, R. L. Introducción a la Astronomía. Universidad de Sonora.

1.4 Tipos de órbitas en sistemas binarios.

Tal como lo cita Correa-Otto (2012), un planeta puede tener distintas órbitas estables en un sistema binario. Las órbitas en sistemas binarios se separan tradicionalmente en tres categorías (Holman y Wiegert, 1999). Dvorak (1984) realiza la siguiente clasificación de órbitas en sistemas binarios:

- **Órbitas Tipo P.** En este caso el planeta se encuentra en una órbita exterior a la binaria, en donde se mueve alrededor del centro de masas de ambas estrellas, tal como se indica en la Figura 1.27.

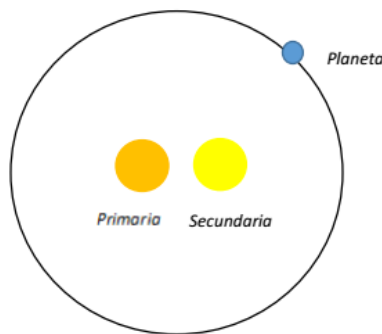


Figura 1.27 Ejemplo de una órbita Tipo P.

- **Órbitas Tipo S.** Aquí el planeta puede encontrarse en dos posiciones; puede estar en una órbita interior que gira alrededor de la estrella primaria. También puede estar en una órbita satélite, en la cual gira alrededor de la estrella secundaria (Figura 1.28).



Figura 1.28 Ejemplo de una órbita Tipo S.

- **Órbitas Tipo T.** Finalmente el planeta puede estar librando (oscilando) establemente alrededor de los puntos lagrangianos L_4 , L_5 del sistema binario (Figura 1.29).

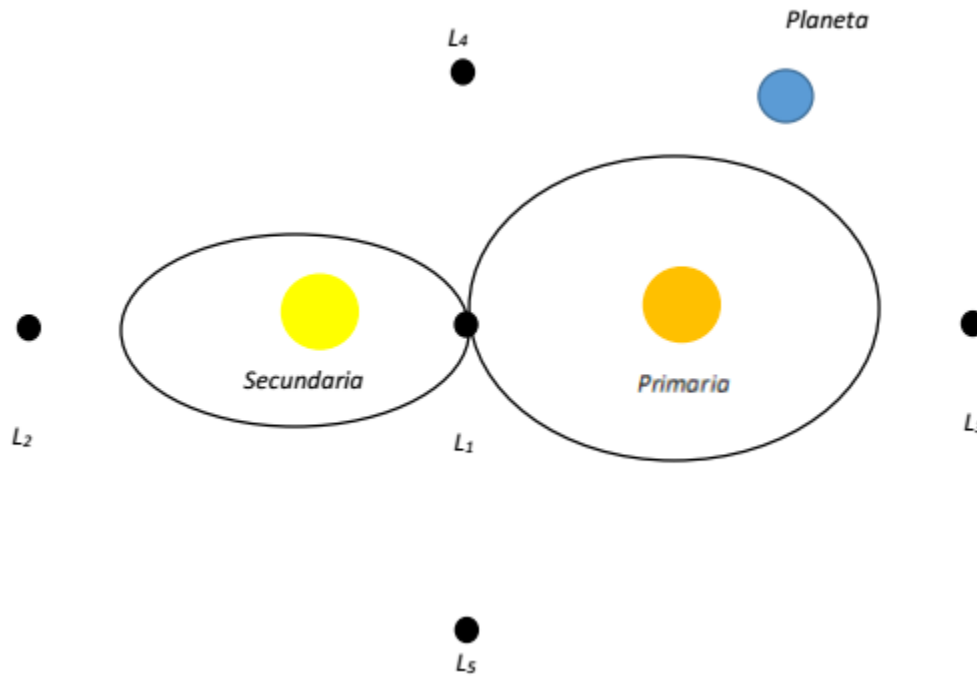


Figura 1.29 Ejemplo de una órbita Tipo T.

En este proyecto de investigación se analizan sistemas circumbinarios en donde el planeta orbita el sistema binario alrededor de las dos estrellas, es decir, órbitas tipo P.

1.5 Exoplanetas en sistemas circumbinarios.

Un planeta circumbinario es un planeta que orbita alrededor de dos estrellas en lugar de una sola. Debido a la proximidad y la órbita de algunas estrellas binarias, la única manera en que se formen planetas, es que lo hagan por fuera de sus estrellas (Holman y Wiegert, 1999). Hoy en día se tiene el conocimiento de más de 3000 planetas giran alrededor de estrellas distintas a nuestro Sol. En donde muchos de estos sistemas planetarios exhiben características que son semejantes a las de nuestro Sistema Solar; por ejemplo, excentricidades de los planetas medianas y altas, además de la presencia de planetas tipo

Júpiter en ellos. Por lo que se ha incrementado un mayor estudio y revisión de las teorías de formación y evolución de dichos sistemas planetarios (Chavéz, Georgakarakos, Prodan, et al. 2015). Kiseleva-Eggleton y Eggleton (2001) indican que las más recientes observaciones dan hasta un 70% de probabilidad, de que se formen sistemas multiestelares en la Vía Láctea; donde el estudio de los procesos de formación planetaria y evolución de estos sistemas, es un importante campo de investigación.

El primer caso confirmado de un planeta extrasolar circumbinario, fue encontrado orbitando al pulsar PSR B1620-26, que contiene un pulsar de milisegundos y una enana blanca ^[8]; este pulsar se encuentra en el cumulo globular M4^[9]. La existencia del tercer cuerpo fue reportada por primera vez en 1993 (Baker y Foster, 1993), y se sugirió que podría ser un planeta tras cinco años de observación (Thorsett, Arzoumanian y Taylor, 1993). En el año 2003, el planeta se caracteriza por ser 2.5 veces la masa de Júpiter, orbitando a 23 UA del centro de masas del sistema binario (Sigurdsson, Richer, Hansen, et al. 2003). Ya en el año 2005, se encontró al primer planeta circumbinario alrededor de un sistema en donde una de sus estrellas pertenece a la secuencia principal. Tal sistema es HD 202206; descubierto por el método de velocidad radial, este planeta tiene una masa de 2.44 veces la de Júpiter y se localiza a 2.55 UA del centro de masas de su sistema binario (Correia, Udry, Mayor, et al. 2005), el cual consta de una estrella tipo solar y una enana marrón.

El 15 de septiembre de 2011, se anunció el primer descubrimiento basado en el tránsito de un planeta circumbinario (Doyle, 2011). El planeta denominado Kepler-16b se encuentra a 2000 años luz de la Tierra. Es posible que se trate de un mundo helado de roca y gas, con aproximadamente la mitad de masa de Saturno. Kepler-16b orbita dos estrellas que también están orbitando entre sí, una estrella es de aproximadamente dos tercios de la masa del Sol y la otra con un quinto del tamaño del Sol. El planeta tarda 229 días en dar una vuelta completa al sistema binario y 225 días en orbitar al centro de masas, las estrellas se eclipsan una a la otra cada tres semanas. El descubrimiento de Kepler-16b fue realizado por el satélite Kepler de la NASA, siendo el primer planeta circumbinario descubierto por este satélite. Más planetas circumbinarios fueron descubiertos por esta misión: Kepler-34b

y Kepler-35b (Welsh, Orosz, Carter, et al. 2012), Kepler-38b (Orosz, Welsh, Carter, et al. (2012), Kepler-47b y Kepler-47c (Orosz, , Welsh, Carter, et al. 2012 y Kostov, McCullough, Hinse, et al. 2013), Kepler-64b (Kostov, McCullough, Carter, et al. 2014), Kepler-413b (Kostov, McCullough, Carter, et al. 2014), y finalmente los más recientes planetas descubiertos son Kepler-453b (Welsh, Orosz, Short, et al. 2015) y Kepler1647-b (Kostov, Orosz, Welsh, et al. 2016), siendo estos dos últimos los objetos de investigación en esta tesis. Sin embargo, el 6 de enero de 2020, la NASA anuncio el descubrimiento del primer planeta circumbinario descubierto por un estudiante al analizar los datos enviados por el satélite espacial TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite, por sus siglas en ingles). El planeta TOI 1338 b se estima en 6.9 masas terrestres, orbitando el par binario cada 94 días (Reddy, F. 2020).

En la Tabla 1.2, se listan los planetas circumbinarios descubiertos hasta la fecha de escritura de esta tesis (13 de enero de 2021).

[9] Una enana blanca es un remante estelar que se genera cuando una estrella de masa menor a 9-10 masas solares ha agotado su combustible nuclear.

[10] Un cúmulo globular es un tipo de cúmulo estelar que consiste en una agrupación de 100 000 a 1 000 000 de estrellas de población II, gravitacionalmente ligadas, con una distribución aproximadamente esférica y que orbita en torno a la galaxia de manera similar a un satélite.

No.	Sistema Binario	Planeta	Masa (M_J)	Semieje mayor (UA)	Periodo Orbital (días)	Año de Descubrimiento	Método	NASA Exoplanet Discovery Date
1	PSR B1620-26	b	2 ± 1	23	24820	1993	Pulsar	Julio 2003
2	HD 202206	c	2.179	2.4832	$1397.44 \pm 5 \pm 19.056$	2005	Velocidad radial	Septiembre 2005
3	DP Leonis	b	6.05 ± 0.47	8.19 ± 0.39	10220 ± 730	2010	Binaria Eclipsante	Enero 2010
4	NN Serpentis	c	6.91 ± 0.54	5.38 ± 0.20	5657.50 ± 164.25	2010	Binaria Eclipsante	Octubre 2010
5	NN Serpentis	d	2.28 ± 0.38	3.39 ± 0.10	2828.75 ± 127.75	2010	Binaria Eclipsante	Octubre 2010
6	Kepler-16	b	0.333 ± 0.016	0.7048 ± 0.0011	228.776 ± 0.020	2011	Transito Planetario	Septiembre 2011
7	Kepler-34	b	0.220 ± 0.0011	1.0896 ± 0.0009	288.776 ± 0.063	2012	Transito Planetario	Enero 2012
8	Kepler-35	b	0.127 ± 0.02	0.603 ± 0.001	131.458 ± 0.077	2012	Transito Planetario	Enero 2012
9	NY Virginis	b	2.85	3.457	3073.3	2012	Binaria Eclipsante	Febrero 2012
10	RR Caeli	b	4.2 ± 0.4	5.3 ± 0.6	4343.5 ± 36.5	2012	Binaria Eclipsante	Mayo 2012
11	Kepler-38	b	< 0.384	0.4644 ± 0.0082	105.595 ± 0.53	2012	Transito Planetario	Octubre 2012
12	Kepler-47	b	0.027 ± 0.005	0.2956 ± 0.0047	49.514 ± 0.040	2012	Transito Planetario	Septiembre 2012
13	Kepler-47	c	0.62 ± 0.013	0.989 ± 0.016	303.158 ± 0.072	2012	Transito Planetario	Septiembre 2012
14	Kepler-47	d	$19.017 \pm 11.695 - 23.803 M_{\oplus}$	0.6992 ± 0.0033	187.35 ± 0.15	2019	Transito Planetario	Abril 2019
15	PH1	b	< 0.532	0.634 ± 0.011	138.506 ± 0.107	2013	Transito Planetario	Mayo 2013
16	ROXs 42B	b	9 ± 3	140 ± 10	Desconocida	2014	Imagen Directa	Enero 2014
17	HD 106906	b	11 ± 2	650	desconocida	2014	Imagen Directa	Enero 2014
18	Kepler-413	b	0.21 ± 0.7	0.3553	66.262 ± 0.024	2014	Transito Planetario	Marzo 2014
19	Kepler-453	b	0.0006 ± 0.0503	0.7903 ± 0.0028	240.503 ± 0.053	2014	Transito Planetario	Septiembre 2014
20	Kepler-1647	b	1.52 ± 0.65	2.7205 ± 0.0070	$1107.59 \pm 2 \pm 0.0227$	2016	Transito Planetario	Diciembre 2015
21	OGLE-2007-BLG-349	b	0.25 ± 0.041	2.59	?	2016	Micro lente gravitacional	Publicado
22	MXB 1658-298		23.5 ± 3.0	1.6 ± 0.1	760	2017	Periodic delay in X-ray eclipses	Publicado
23	KIC 5095269	b	7.70 ± 0.08	$0.795 - 0.805$	237.7 ± 0.1	2017	Binaria Eclipsante	Publicado
24	TOI 1338	b	$6.9 M_{\oplus}$		94	2020	Transito Planetario	Publicado

Tabla 1.2 Lista de planetas circumbinarios confirmandos hasta diciembre 2020. Fuente: Perryman, M. 2020.

1.6 Estructura de la Tesis.

Con los conocimientos que se han expuesto hasta este punto, nos encontramos en momento de definir la estructura de esta investigación sobre la estabilidad dinámica en los sistemas circumbinarios Kepler-453b y Kepler-1647b.

Comenzando con el capítulo 2, aquí se expondrán los aspectos teóricos necesarios para comprender los mecanismos de estabilidad que utilizaremos en el capítulo 4; tales como el problema de 2 cuerpos, el problema de tres cuerpos; así como el problema de n cuerpos; definiendo en cada caso sus respectivas ecuaciones de movimiento. Se introducen además conceptos acerca de órbitas baricéntricas y por supuesto la presentación de los elementos orbitales, cuya variación en el tiempo determina la condición de estabilidad.

En el capítulo 3, se desarrollan todas las características físicas de los sistemas objeto de estudio en esta tesis; sus antecedentes, tipos de estrellas anfitrionas, metalicidades y todos los datos astrofísicos resultado de previos trabajos de investigación a esta tesis.

El capítulo 4, se inicia con las definiciones de estabilidad dinámica de acuerdo con el tipo de órbita que describen los sistemas binarios. Se introducen los conceptos de evolución a largo plazo y de semieje mayor crítico. Finalmente se describe la metodología para resolver las ecuaciones de movimiento, la búsqueda del semieje mayor crítico y la elaboración de mapas que nos ilustran las regiones en donde el planeta es estable. Se reserva el capítulo 5 para mostrar los resultados de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento y hacer un análisis de estos resultados. La discusión y las conclusiones de este análisis se expondrán detalladamente en el capítulo 6, así como las futuras investigaciones que se podrían realizar con respecto a la estabilidad dinámica, no solo de los sistemas Kepler-453b y Kepler-1647b; sino también con respecto a otros sistemas circumbinarios, o en su defecto a estudios dentro de nuestro Sistema Solar.

Finalmente, en el apéndice se incluyen los programas computacionales del integrador simpléctico Mikkola (Mikkola e Innanen, 1999), se describe a los satélites Kepler y TESS de la NASA y se hablará de conceptos de dinámica lineal.

Capítulo 2

Aspectos Teóricos de Mecánica Celeste.

La Mecánica Celeste es el estudio de los movimientos de los cuerpos que están en el cielo, junto con la astronomía esférica, fue la principal rama de la astronomía hasta el final del siglo XIX, cuando rápidamente comenzó a evolucionar la astrofísica (Karttunen, Kroger, Oja, et al., 2007). Inicialmente la tarea básica de la Mecánica Celeste clásica era la de explicar y predecir los movimientos de planetarios y satelitales. En la antigüedad los primeros modelos para explicar tales movimientos se basaban en epiciclos, y tiempo después se basaron en las leyes de Kepler. Estas lograron describir el movimiento planetario mas no explicarlo.

Llegada la década de 1680 fue propuesta la herramienta más poderosa, que, junto con las tres leyes de Kepler, lograron por fin explicar el movimiento observacional de los cuerpos celestes; estamos hablando de la ley de la Gravitación Universal de Newton junto con sus tres leyes del movimiento.

En este capítulo se exponen las leyes mencionadas y sus distintas formas que adquieren, dependiendo el número de cuerpos celestes a considerar como objetos de estudio; así como sus diferentes soluciones. Prácticamente el presente capítulo, es la base teórica fundamental para poder desarrollar los criterios de estabilidad dinámica que se utilizan más adelante en esta tesis.

2.1 Las Leyes de Kepler. Una Introducción a las Órbitas Elípticas.

Aunque el modelo de Sistema Solar propuesto por Copérnico, aparte de su simplicidad inherente (eliminaba el movimiento planetario explicado por epiciclos), de su forma estética bastante agradable, no fue aceptado inmediatamente. La idea de que el Sol era el centro del Sistema Solar, carecía del sustento observacional que fuera capaz de demostrar que el modelo geocéntrico vigente en esos tiempos, era por demás incorrecto.

2.1.1 Tycho Brahe.

Después de la muerte de Copérnico, Tycho Brahe (1546-1601), cuidadosamente siguió los movimientos de lo que en aquel tiempo se conocían como “*estrellas errantes*” y otros objetos celestes. Para mejorar la precisión de las observaciones, Tycho utilizó grandes instrumentos de medición como su gran cuadrante. Las observaciones de Tycho fueron tan meticulosas para su época que logró medir la posición de un objeto en el cielo con una precisión aproximada de 4 minutos de precisión. Mediante sus observaciones, indicó que los cometas deben de venir de lugares mucho más distantes que la Luna, y además logró observar la supernova de 1572. A pesar de su sobresaliente carrera como astrónomo, Tycho no pudo encontrar una evidencia concisa para explicar el movimiento de la Tierra a través del cielo. Por lo tanto, llegó a la conclusión de que el modelo de Copérnico debía ser falso, llegando a proponer su propio modelo del Sistema Solar (North, 2001). El cual era un híbrido, ya que los planetas giran alrededor del Sol, pero el Sol y la Luna giraban alrededor de la Tierra.

2.1.2 Las Leyes de Kepler del Movimiento Planetario.

En 1600, Johannes Kepler (1571-1630) acepta la invitación de Tycho Brahe para colaborar en el observatorio imperial que había montado este último. Dado que la relación entre ambos fue compleja, Kepler no pudo utilizar las observaciones de Brahe, sino hasta después de su muerte. Especialmente Kepler comenzó a analizar los datos acerca del movimiento retrógrado de Marte y buscó establecer una correlación con las órbitas circulares propuestas en el modelo heliocéntrico de Copérnico, no obteniendo resultados satisfactorios. De tal manera y dada tal imposibilidad de explicar órbitas circulares, utilizó órbitas elípticas y encontró una correlación entre los datos observacionales de Marte y su modelo de órbita elíptica. Tiempo después llegaría a la conclusión de que todos los planetas del Sistema Solar manifestaban un comportamiento de órbitas elípticas alrededor del Sol (Fierro y Herrera, 1988).

En 1609 Kepler publicó las primeras dos de sus tres leyes del movimiento planetario en el libro “*Astronomica Nova*”, las cuales se pueden enunciar del siguiente modo (Carroll, 2007):

- **Primera ley de Kepler.** Los planetas orbitan al Sol describiendo una elipse, donde el Sol se encuentra en uno de los dos focos.
- **Segunda ley de Kepler.** La línea que une los planetas con el Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales (Figura 2.1).

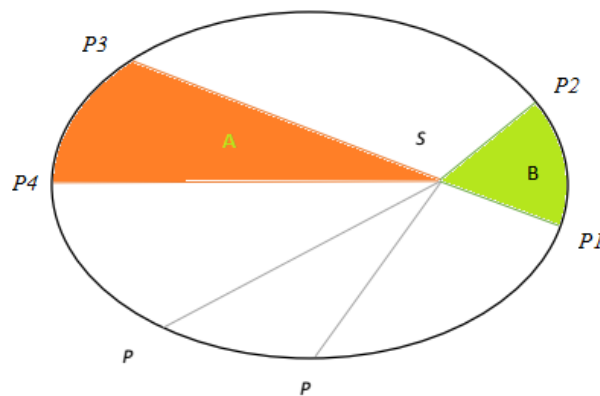


Figura 2.1 Representación gráfica de la segunda ley de Kepler. Dado a que las áreas A y B miden lo mismo, entonces el planeta tarda el mismo tiempo en recorrer de P₁ a P₂, que de P₃ a P₄.

La tercera ley de Kepler fue publicada diez años más tarde en el libro “*Harmonic Mundi*”. Su ley final relaciona la distancia promedio orbital de un planeta al Sol con su periodo sideral (periodo de tiempo que tarda el planeta en dar una vuelta al Sol). De manera que queda definida como (Carroll, 2007):

- Tercera ley de Kepler.

$$\frac{a_1^3}{P_1^2} = \frac{a_2^3}{P_2^2} \quad (2.1)$$

donde P es el periodo orbital del planeta medido en años y a es la distancia promedio del planeta al Sol en unidades astronómicas, conocida como semieje mayor.

2.1.3 Las Leyes de Kepler del Movimiento Planetario.

Para apreciar el significado de las leyes de Kepler, primero debemos comprender la naturaleza de una elipse. Una elipse está definida por una sucesión de puntos que satisfacen la ecuación

$$r + r' = 2a \quad (2.2)$$

Donde r y r' representan las distancias de la elipse a los dos puntos focales F y F' , respectivamente, tal como se aprecia en la Figura 2.2.

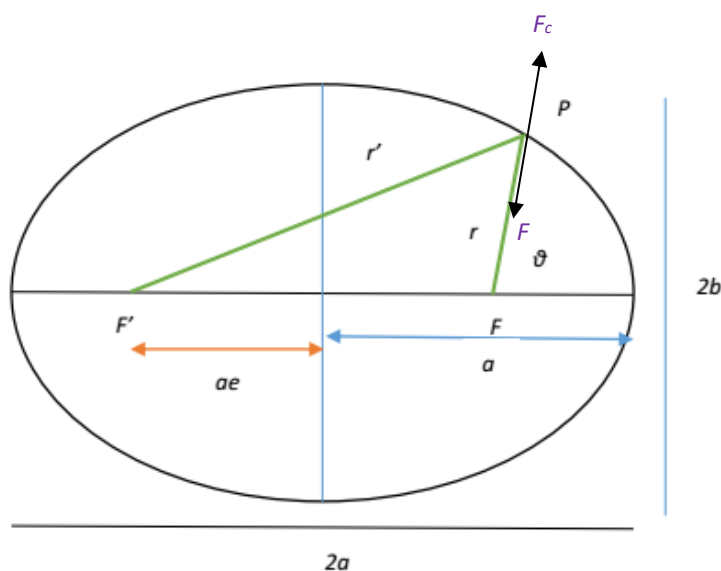


Figura 2.2 La geometría de una elipse.

De acuerdo con la primera ley de Kepler, un planeta orbita al Sol en una elipse, con el Sol localizado en uno de los focos, el foco principal F . En la Figura 2.2, se debe de notar que si $F = F'$, estamos localizados en un mismo punto y entonces $r = r'$, y por lo tanto, la ecuación 2.2 se reduce a:

$$r = r' = a \quad (2.3)$$

Siendo 2.3 la ecuación de un círculo, entonces podemos asumir simplemente que una circunferencia, es un caso especial de una elipse. La distancia b es conocida como el semieje menor.

La excentricidad, e , cuyo rango es: $0 \leq e \leq 1$, de una elipse se define como la distancia entre los focos dividida entre el eje mayor $2a$; lo que implica que la distancia de cualquiera de los puntos focales, medidos desde el centro de la elipse, puede expresarse como ae . Para un círculo, $e = 0$. El punto de la elipse que está más cercano al foco principal se llama *Perihelio*; en el caso contrario, el punto más lejano al foco principal es conocido como *Afelio*.

Para obtener una relación entre a , b y c , de la figura 2.2; consideramos uno de los puntos en cada extremo del semieje menor de la elipse, donde $r = r'$. En este caso, $r = a$ y por el teorema de Pitágoras,

$$r^2 = b^2 + a^2 e^2 \quad (2.4)$$

sustituimos $r = a$

$$a^2 = b^2 + a^2 e^2$$

$$a^2 - a^2 e^2 = b^2$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (2.5)$$

La segunda ley de Kepler establece que la velocidad del planeta depende de la localización en la órbita. Si queremos describir con detalle el comportamiento orbital de un planeta, debemos especificar donde se encuentra el planeta, es decir, su radio vector; así también necesitamos la rapidez del planeta y en qué dirección se está moviendo (vector velocidad). Frecuentemente es más conveniente expresar la órbita del planeta en coordenadas polares, indicando la distancia r medida desde el foco principal, en términos de un ángulo θ , medido en contra de las manecillas del reloj, iniciando desde el eje mayor de la elipse con dirección hacia el perihelio.

Utilizando de nueva cuenta el teorema de Pitágoras, tenemos

$$r'^2 = r^2 \sin^2 \theta + (2ae + r \cos \theta)^2$$

la cual se reduce a

$$r'^2 = r^2 + 4ae(ae + r \cos \theta)$$

y considerando la definición de elipse dada por la ecuación 2.2, llegamos a la siguiente expresión para el caso de una elipse:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad , \quad (0 \leq e \leq 1) \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 adquiere otras formas matemáticas de acuerdo con el tipo de órbita en la cual se puede mover el planeta, tal como se muestra en la Tabla 2.1.

Tipo de órbita	Excentricidad	Ecuación que describe la órbita
Circunferencia	$e = 0$	$r = a \quad (2.7)$
Parábola	$e = 1$	$r = \frac{2p}{1 + \cos \theta} \quad (2.8)$ <p>p es denominado como el lado recto.</p>
Hipérbola	$e \geq 1$	$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} \quad (2.9)$

Tabla 2.1 La ecuación del radio vector dependiendo el tipo de órbita geométrica.

2.2 Ley de la Gravitación Universal de Newton.

Isaac Newton (1642-1727), utilizó sus tres leyes del movimiento en combinación con la tercera ley de Kepler, así encontró una expresión que describe la fuerza que mantiene a los planetas en sus órbitas. A esta expresión, se le conoce como la Ley de la Gravitación Universal; y una manera de deducirla, es considerando el caso especial de movimiento circular de una masa m , cerca de una masa mucho mayor M . Para la tercera ley de Kepler utilizaremos el periodo orbital P en años y el semieje mayor a en unidades astronómicas:

$$a^3 P^2 = k, \quad r^3 P^2 = k \quad (2.10)$$

Donde r es la distancia entre los dos objetos y k es una constante de proporcionalidad. Ahora el periodo de la órbita lo escribimos en términos del perímetro de la circunferencia, considerando movimiento circular uniforme

$$P = \frac{2\pi r}{v} \quad (2.11)$$

sustituyendo 2.10 en 2.11 tenemos

$$\frac{4\pi^2 r^2}{v^2} = kr^3$$

ordenando y multiplicando ambos lados por m , tenemos

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2}{kr^2} m$$

El lado izquierdo de la ecuación es conocido como la fuerza centrípeta para el movimiento circular uniforme, como se muestra en la Figura 2.2:

$$F_c = \frac{4\pi^2}{kr^2} m$$

La fuerza para la masa M estará dada entonces por:

$$F = \frac{4\pi^2}{k'r^2} M$$

Expresando explícitamente esta simetría y considerando que $k = k''/M$ y k'/m , se introduce una nueva constante $G = 4\pi^2/k''$. De tal manera, que con esto se llega a la Ley de Gravitación Universal encontrada por Newton:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (2.12)$$

Donde G es igual a $6.673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, en el sistema internacional de unidades (SI).

2.3 Derivación de las leyes de Kepler.

Aunque Kepler pudo finalmente determinar la geometría del movimiento planetario, que en su forma más general tiene un comportamiento elíptico en lugar de circular; sin embargo, no pudo explicar la naturaleza de la fuerza que mantiene a los planetas moviéndose en sus respectivos patrones. Fue Newton, quien como ya vimos dio forma y significado matemático esta fuerza y generalizó el trabajo de Kepler, derivando las empíricas leyes del movimiento planetario a través de la ley de la gravitación universal. La derivación de las leyes de Kepler es un paso muy importante en el desarrollo de la Mecánica Celeste.

2.3.1 El Problema de Dos Cuerpos. Las Ecuaciones de Movimiento.

Dos estrellas de masas m_1 y m_2 , donde $m_1 \geq m_2$, orbitan con un centro de masas C en un campo de atracción gravitacional mutuo, de acuerdo con la Ley de Gravitación Universal de Newton, tal como lo ilustra la Figura 2.3.

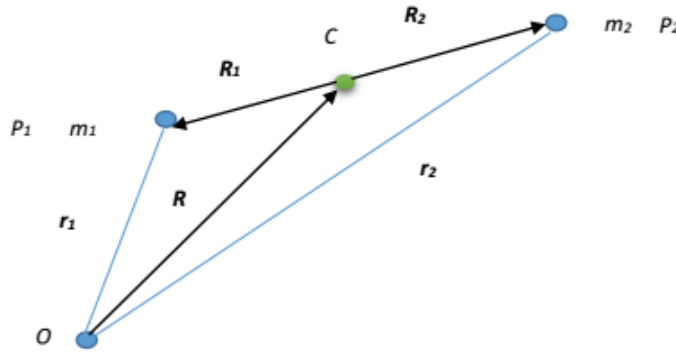


Figura 2.3 Dos masas m_1 y m_2 orbitando un centro de masas común C .

En la Figura 2.3 las estrellas están en las posiciones P_1 (masa m_1) y P_2 (masa m_2) a un tiempo t , además los vectores posición están referidos al sistema inercial con origen en el punto O , denotados por \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente. Entonces la separación entre las estrellas está dada por el vector $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$.

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{r}$$

$$\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

Para un sistema de dos cuerpos aislados, la gravitación newtoniana muestra que las fuerzas actuando sobre dos masas puntuales, son iguales, pero de signo opuesto, esto es,

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

La magnitud de cada fuerza es $F = Gm_1m_2/r^2$, y a su vez “ F ” es igual a la masa del cuerpo multiplicada por la aceleración que experimenta dicha masa a un tiempo t , $F = mr''$, por ejemplo. De acuerdo con esto podemos escribir las ecuaciones de movimiento para las dos estrellas como

$$m_1\mathbf{r}_1'' = -G \frac{m_1m_2}{r^2} \mathbf{u} \quad , \quad m_2\mathbf{r}_2'' = -G \frac{m_1m_2}{r^2} (-\mathbf{u}) \quad (2.13)$$

Donde \mathbf{u} es un vector unitario con dirección $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$.

Definimos ahora un vector posición \mathbf{R} como el vector promedio ponderado de los vectores posición para cada una de las masas:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.14)$$

Si colocamos el centro de masas del sistema binario en el origen del sistema de referencia, como lo muestra la Figura 2.4, la ecuación 2.14 se reduce a $\mathbf{R} = 0$.

$$0 = \frac{m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2}{m_1 + m_2}, \quad m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2 = 0 \quad (2.15)$$

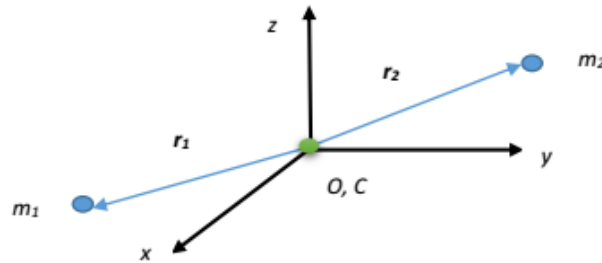


Figura 2.4 Dos masas m_1 y m_2 orbitando un centro de masas común C , colocado en el origen del sistema cartesiano.

Por lo tanto, podemos escribir expresiones para el vector \mathbf{r} que separa a ambas estrellas; despejando \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 de la ecuación 2.15:

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{m_2 \mathbf{R}_2}{m_1}, \quad \mathbf{R}_2 = -\frac{m_1 \mathbf{R}_1}{m_2} \quad (2.16)$$

Las ecuaciones 2.16 se utilizan en la sección 2.3.3, para definir las coordenadas baricéntricas.

2.3.2 El Movimiento Relativo.

Es importante considerar el movimiento de una componente de un sistema binario, relativo a otro compañero moviéndose con respecto al centro de masas del sistema. El movimiento

relativo simplemente se describe al sustraer algebraicamente las dos ecuaciones de movimiento, dadas por las ecuaciones 2.13, para obtener

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.17)$$

Multiplicando 2.17 por $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, donde μ es la masa reducida del sistema, tenemos

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \mathbf{u}$$

y simplificando, entonces llegamos a la expresión

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 m_2)}{r^2} \mathbf{u} \quad (2.18)$$

El movimiento de cualquier cuerpo en sus órbitas relativas, es como si el orbitador tiene una masa μ , y la masa central es la masa total del sistema.

2.3.3 Ecuaciones de movimiento en coordenadas baricéntricas.

Otro tipo de movimiento es el que describe un cuerpo relativo al centro de masas o baricentro del sistema binario. De acuerdo con la Figura 2.3, escribiremos los vectores \mathbf{CP}_1 y \mathbf{CP}_2 como:

$$\mathbf{CP}_1 = \mathbf{R}_1 \quad , \quad \mathbf{CP}_2 = \mathbf{R}_2$$

Además de las siguientes relaciones vectoriales

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{R}_1 \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{R}_2 \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$$

Y utilizando la ecuación 2.15, podemos escribir dos expresiones alternativas para el vector \mathbf{r} ; el cual conecta a las dos estrellas:

$$\mathbf{r} = +\frac{(m_1 + m_2)}{m_2} \mathbf{R}_1 \quad , \quad \mathbf{r} = -\frac{(m_1 + m_2)}{m_1} \mathbf{R}_2 \quad (2.19)$$

Derivamos dos veces para obtener los vectores aceleración:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = 0 + \ddot{\mathbf{R}}_1 \quad , \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 + \ddot{\mathbf{R}}_2$$

con esto, se pueden escribir las dos ecuaciones de movimiento en coordenadas baricéntricas:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -\frac{Gm_2}{r^3}(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \quad , \quad \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1}{r^3}(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1) \quad (2.20)$$

Las dos ecuaciones no son las definitivas, porque tienen vectores distintos en cada lado de cada ecuación. Sin embargo, utilizando las expresiones para \mathbf{R} dadas por la ecuación 2.16, se llega a la forma final de las ecuaciones de movimiento para el caso de dos cuerpos en forma baricéntrica:

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} \quad , \quad \ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{R}_2}{R_2^3} \quad (2.21)$$

2.3.4 Derivación Newtoniana de las Leyes de Kepler.

Utilizando los conceptos de coordenadas relativas, baricéntricas y las ecuaciones de movimiento; en este caso para el problema de dos cuerpos; Newton dedujo matemáticamente las leyes de Kepler del movimiento planetario. Sin embargo, dada la extensión y rigurosidad del análisis matemático, en esta sección solo serán presentadas las tres ecuaciones fundamentales, Murray y Dermott (1999), ofrecen una demostración detallada acerca de estas importantes leyes.

- Primera ley de Kepler.

$$r = \frac{L^2 / \mu^2}{GM(1 + e \cos \theta)} \quad (2.22)$$

Donde L debe ser el momento angular total del sistema, μ es la masa reducida y M es la masa total del sistema definida como

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = m_1 + m_2$$

- Segunda ley de Kepler.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \frac{L}{\mu} \quad (2.23)$$

Donde dA/dt es la razón del cambio de área con respecto al tiempo.

- Tercera ley de Kepler.

$$P = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (2.24)$$

2.4 El Problema de *n*-cuerpos.

Las ecuaciones de movimiento dadas por las expresiones 2.13, son exclusivamente válidos para un problema aislado con dos cuerpos. Para nuestro objetivo, que es analizar la estabilidad dinámica de los sistemas circumbinarios Kepler-453b y Kepler-1647b, es necesario ampliar tales ecuaciones de movimiento para el caso de 3 cuerpos.

El problema de *n*-cuerpos es uno de los problemas de la Mecánica Celeste, cuya importancia actualmente va mucho más allá del ámbito planetario. Tal es su trascendencia, que el problema de *n*-cuerpos es fundamental en la dinámica de los sistemas estelares, galácticos y en la cosmología. Aguilar (1992), describe el objetivo básico del problema de *n*-cuerpos como la descripción de la evolución dinámica de un sistema representable por elementos discretos, los cuales están sujetos a una interacción dada.

Históricamente el problema de *n*-cuerpos es un modelo matemático sugerido por Isaac Newton en su libro *Principios matemáticos de la filosofía natural* (1687), para modelar el

comportamiento de nuestro Sistema Solar (Bor y Montgomery, 2014). Aunque el problema de dos cuerpos tiene una solución analítica exacta, el considerar tres o más cuerpos no tiene solución analítica exacta. Esto dio lugar en los siglos XVII y XVIII al surgimiento de lo que hoy en día conocemos como teoría de perturbaciones, y con esto obtener soluciones aproximadas para el Sistema Solar; en el cual una masa (el Sol) domina a todas las demás (Aguilar, 1992).

El problema de tres cuerpos surgió cuando se hizo necesario explicar cómo el movimiento de un planeta alrededor del Sol, se ve afectado por otro planeta y el llamado problema lunar. Lagrange y Laplace fueron los primeros avanzar en la idea de que las ecuaciones que describen el movimiento de un planeta alrededor del Sol, son perturbadas por el movimiento de otros planetas; de ahí el origen de la teoría de perturbaciones (Bogolyubov, 1970). Como un ejemplo del poder de estas técnicas perturbativas, podemos mencionar la reconstrucción de la órbita del planeta enano Ceres, realizada por Karl F. Gauss en base a las observaciones del astrónomo italiano Giuseppe Piazzi (Forbes, 1971). También podemos citar la predicción de la existencia del planeta Neptuno en el año 1846, realizada por los astrónomos Urbain Joseph Le Verrier y John Couch Adams en base a las irregularidades que presentaba la órbita de Urano (Moreno Corral, 1997). Un punto en contra de la teoría de perturbaciones, es que se vuelve muy complicada desde la perspectiva matemática conforme se van considerando más cuerpos como objetos de estudio. En 1860, C. E. Delaunay en su obra *Theorie du mouvement de la Lune, vol. 1*, publicó su aproximación analítica al problema del movimiento planetario de la Luna; esta aproximación que contiene más de 10 000 términos, representó veinte años de trabajo y fue publicada en dos volúmenes (Aguilar, 1992). En el año 1941 fue realizada la primera simulación numérica del problema de *n-cuerpos*, dentro de un contexto astronómico (Holmberg, 1941).

Después de estudiar brevemente el contexto histórico del problema de *n-cuerpos*, es conveniente ahora tener las expresiones matemáticas que describen este caso general. Partiendo del problema de dos cuerpos, las ecuaciones de movimiento vienen descritas por las ecuaciones (2.13) (Hildich, 2001):

$$m_1 \mathbf{r}_1'' = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{u} \quad , \quad m_2 \mathbf{r}_2'' = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} (-\mathbf{u}) \quad (2.13)$$

Como ya se mencionó estas ecuaciones de movimiento, son las únicas que poseen solución analítica exacta.

Si consideramos el estado general para el problema de tres cuerpos, en un instante de tiempo, para las posiciones del vector \mathbf{r}_i y masas m_i , existen tres ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden, que no poseen solución analítica exacta (Peña y Palacián, 2006):

$$\mathbf{F}_1 = -m_1 \mathbf{r}_1'' = -\frac{Gm_2}{(r_1 - r_2)^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \frac{Gm_3}{(r_1 - r_3)^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{F}_2 = -m_2 \mathbf{r}_2'' = -\frac{Gm_3}{(r_2 - r_3)^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) - \frac{Gm_1}{(r_2 - r_1)^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{F}_3 = -m_3 \mathbf{r}_3'' = -\frac{Gm_2}{(r_3 - r_1)^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) - \frac{Gm_1}{(r_3 - r_2)^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \quad (2.27)$$

La simplicidad y dificultad del problema de tres cuerpos en sus diversas formas ha atraído la atención durante siglos; algunos matemáticos que han realizado contribuciones importantes a tal problema fueron: Leonard Euler, Louis Lagrange, Pierre Simon Laplace, Jakov Jacobi, Urbain Le Verrier, William Hamilton, Henry Poincare y George Birkhoff (Murray y Dermont, 1999). Aguilar (1992) define el problema de *n*-cuerpos como una colección de N partículas de masa $m_i > 0$, moviéndose bajo la acción gravitacional de Newton en el espacio R^3 con numero de cuerpos, $n > 1$. Se caracteriza por dar las posiciones y velocidades de las masas m_i , para todo tiempo t . A partir de las leyes de Newton, las ecuaciones de movimiento de los n cuerpos, son n ecuaciones diferenciales ordinarias de

segundo orden definidas en R^3 ; es decir, un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden. Si la i -ésima partícula tiene masa $m_i > 0$ y posición x_i en R^3 , aplicando la segunda ley de Newton se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\mathbf{F}_i = -m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j}{(r_j - r_i)^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (2.28)$$

El problema de n -cuerpos, solo se puede resolver numéricamente como función del tiempo; es decir, mediante una simulación numérica. Este tipo de simulaciones se realizan por medio de algoritmos computacionales, denominados integradores. De tal forma, que para analizar la estabilidad y el ambiente dinámico de los sistemas circumbinarios Kepler-453b y Kepler-1647b, se resolverán de forma completa las ecuaciones de movimiento, utilizando un integrador simpléctico (integrador numérico para resolver las ecuaciones de Hamilton) para movimientos planetarios (Mikkola, 1977).

2.5 Elementos Orbitales.

Los elementos orbitales de la órbita de un cuerpo celeste son seis variables que permiten definir su órbita alrededor del Sol, o cualquier otro cuerpo celeste de forma totalmente particular, como se muestra en la Figura 2.5. Una descripción completa y rigurosa de este tema, se puede encontrar en Murray y Dermont (1999).

Cuando se les observa desde un sistema inercial, dos cuerpos que orbitan mutuamente trazan trayectorias distintas. Cada una de estas trayectorias tiene su foco en el centro de masa común. Cuando se ve desde un marco no inercial centrado en uno de los cuerpos, sólo la trayectoria del cuerpo opuesto es evidente; elementos de Kepler describen estas trayectorias no inerciales. Una órbita tiene dos conjuntos de elementos Keplerianos dependiendo de qué cuerpo se utiliza como punto de referencia. El cuerpo de referencia se llama el *primario* y el otro cuerpo se denomina *secundario*. El primario no posee necesariamente más masa que el secundario, e incluso cuando los cuerpos son de igual masa, los elementos orbitales dependen de la elección del primario.

Son dos elementos principales que definen la forma y las dimensiones de la elipse:

- **Excentricidad (e)**

Describe cuánto se alarga la elipse en comparación con un círculo (no marcado en el diagrama). Es un número adimensional. Si $e = 0$ tenemos un círculo.

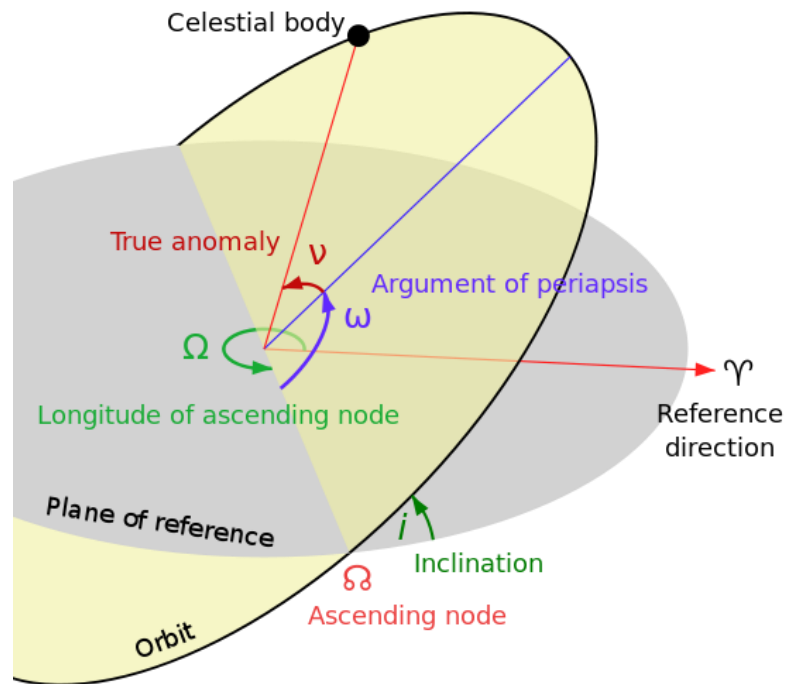


Figura 2.5 Representación geométrica de los elementos orbitales. El plano en gris es conocido como el plano de referencia, mientras que el plano en amarillo ilustra al plano de la órbita del planeta. Crédito de la imagen: Lasunncty. Wikipedia octubre de 2016.

- **Semieje mayor (a)**

Representa la distancia media del cuerpo a la fuente central gravitacional. Geométricamente está definido como la distancia que existe de los vértices de la elipse al centro de la misma. Por convención en esta investigación, la unidad del semieje mayor será la unidad astronómica (UA).

Otros dos elementos definen la orientación del plano orbital:

- **Inclinación (i)**

Es el ángulo que el plano orbital de un cuerpo celeste forma con el plano de referencia. En el Sistema Solar para los planetas se usa como referencia el plano de la eclíptica. Se mide en grados sexagesimales.

La inclinación esta siempre en el rango:

$$0^\circ \leq i \leq 180^\circ \quad (2.29)$$

donde, si $i < 90^\circ$ la orientación de la órbita tiene movimiento prógrado.

En cambio, si $i \geq 90^\circ$, el movimiento de la órbita se caracteriza por ser retrogrado. En el caso limite, cuando $i \rightarrow 0$, entonces el plano orbital coincidirá con el plano de referencia.

- ***Longitud del nodo ascendente (Ω)***

La línea de intersección entre el plano orbital y el plano de referencia estándar se denomina la línea de nodos. El punto en ambos planos, donde la órbita cruza el plano de referencia en movimiento desde abajo hasta por encima del plano se llama *nodo ascendente*, mientras que el ángulo entre la línea de referencia y el radio vector al nodo ascendente, se le llama longitud del nodo ascendente. Para un objeto que orbita el Sol, es el ángulo, con vértice en el Sol, que va desde el punto Aries o punto Vernal hasta el nodo ascendente de la órbita del objeto, medido en el plano de referencia de la eclíptica y en sentido contrario a las manecillas del reloj. Al igual que la inclinación se mide en grados sexagesimales.

Finalmente tenemos a los últimos dos elementos orbitales que complementan la órbita de un cuerpo celeste en el espacio:

- ***Argumento del pericentro (ω)***

Está definido como el ángulo entre el radio vector al nodo ascendente y el pericentro.

- **Anomalía media (M).**

Según Montenbruck (1989) y Meeus (1991), la anomalía media es la distancia angular medida desde el pericentro, en la cual un cuerpo celeste ficticio podría estar moviéndose en una órbita circular a velocidad constante. Esto es, en el mismo periodo orbital que el verdadero cuerpo celeste moviéndose a través de su órbita elíptica (ver figura 2.6).

La anomalía media se puede calcular a través de la solución numérica de la ecuación de Kepler:

$$M = E - e \sin E = n(t - t_0) \quad (2.30)$$

donde t_0 es el tiempo en el cual el planeta pasa por el pericentro, t representa un instante de tiempo en el cual realizamos la medición, n es el movimiento medio diario del astro, $P = 2\pi/n$, P es el periodo del planeta medido en días solares, y E es la anomalía excéntrica que explicamos a continuación.

La *anomalía excéntrica* E , la cual queda establecida como el ángulo medido desde el centro de la elipse, que forma la proyección del planeta sobre la circunferencia principal, y el eje de la elipse. La *anomalía verdadera* T , es el ángulo entre la dirección del pericentro y la posición actual del cuerpo celeste, como se ve desde el foco principal de la elipse. Tanto la anomalía excéntrica como la anomalía verdadera se pueden apreciar también en la Figura 2.6.

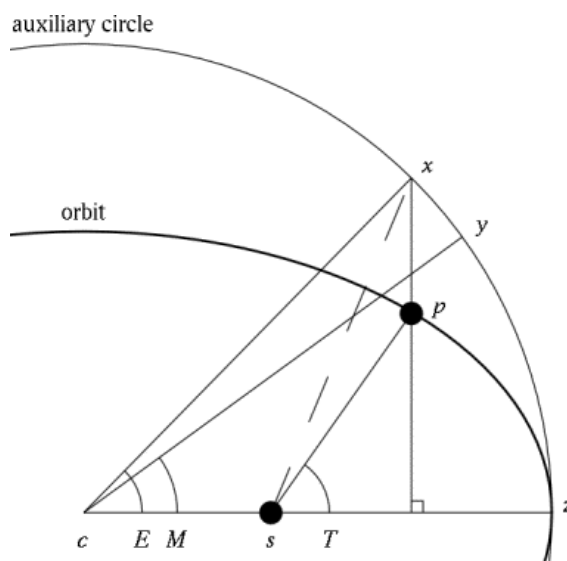


Figura 2.6 Diagrama donde se aprecian los ángulos de la Anomalía Media (M), Anomalía Excéntrica (E) y anomalía verdadera (T) la órbita elíptica y la circunferencia principal. Aunque normalmente, se utiliza la letra f para la anomalía verdadera. Crédito de la imagen Andrew Buck, Wikipedia Octubre 2016.

Capítulo 3

Antecedentes y Características de los Sistemas Circumbinarios

Kepler-453 y Kepler-1647.

3.1 Características Generales del Sistema Circumbinario Kepler-453.

Kepler-453b es un planeta circumbinario con un radio de 6.2 veces el radio terrestre, es decir, $6.2R_{\oplus}$. El planeta tiene una órbita poco excéntrica ($e = 0.0510$), y tarda 240.5 días terrestres en orbitar alrededor de una binaria eclipsante. El sistema binario en sí consiste en un par de estrellas con masas $M_1 = 0.93M_{\odot}$ y $M_2 = 0.194M_{\odot}$ (primaria y secundaria respectivamente) con un período orbital de 27.3 días terrestres. El plano de la órbita del planeta está precesando rápidamente, y su inclinación hace que el planeta este alineado con la estrella primaria en la última parte de los datos que envió el satélite Kepler de la NASA (Welsh, Orosz, Short, et al. 2015). De tal manera que los tres tránsitos observados están presentes en la segunda mitad de la curva de luz y ninguno en la primera parte de dicha curva de luz.

El período de precesión es de 103 años, y durante ese ciclo, los tránsitos son visibles desde la Tierra aproximadamente el 8% del tiempo. Lo anterior tiene la siguiente implicación: *la baja probabilidad de observar el tránsito de un planeta significa que por cada sistema similar a Kepler-453, existen probablemente 11 veces más de estos sistemas circumbinarios que no podemos observar* (Welsh, et al. 2015).

La masa del planeta es demasiado pequeña para perturbar significativamente al sistema binario; en consecuencia, su masa no se puede medir inicialmente con los datos de la binaria; no obstante, mediante un modelo fotodinámico se logró medir un límite superior para la masa de $16 M_{\oplus}$. Con un período de 8.8 veces el del sistema binario, el planeta parece estar fuera de la zona de inestabilidad dinámica (Welsh, et al. 2015).

3.1.1 Las Curvas de Luz del Exoplaneta Kepler-453b.

La identificación de Kepler-453b como un candidato a planeta circumbinario, se realizó mediante inspección visual de curvas de luz para estrellas binarias eclipsantes (Slawson, Prsa, Welsh, et al. 2011). En particular el criterio considerado fue el siguiente: las curvas de luz que tengan períodos orbitales mayores de 1 día y que muestren tanto eclipses primarios como secundarios. Para el caso de Kepler-453b, la profundidad del eclipse primario es del 8 % con respecto a la intensidad de la radiación que recibe el planeta por parte de la binaria, y el eclipse es del tipo anular; en tanto, el eclipse secundario es poco profundo, con sólo aproximadamente el 0.25 %, y es de fondo plano, lo cual es indicativo de un eclipse total. Esto se puede apreciar en la Figura 3.1. Analizando tal Figura, en el panel superior se muestra un segmento de un año de la curva del planeta Kepler-453b, y se manifiestan modulaciones en flujo de radiación recibido por el planeta debido a las manchas estelares del sistema binario.

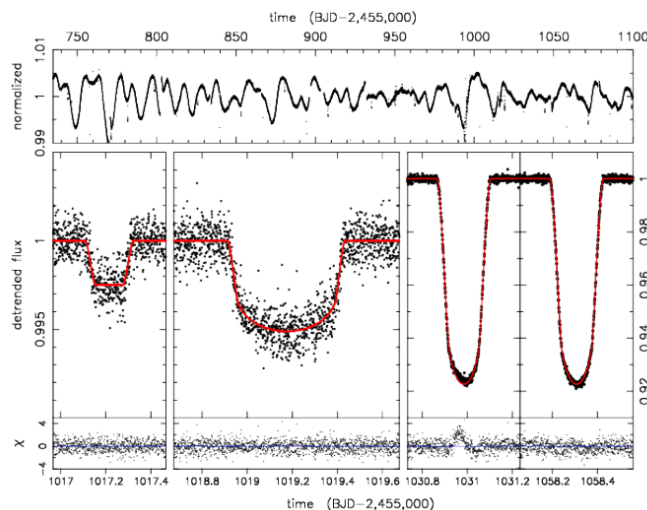


Figura 3.1 Diagrama indicativo del flujo de radiación normalizado que recibe Kepler-453b por parte de sus estrellas madre (panel superior). Además, también se ilustran los eclipses primario y secundario por parte del sistema binario y el tránsito que realiza el exoplaneta (panel inferior). Imagen tomada del artículo: *Kepler 453-b: the 10th Kepler transiting circumbinary planet.* Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

Los cuatro paneles inferiores muestran el eclipse secundario, el tránsito planetario y dos eclipses primarios, respectivamente, estas mediciones se realizaron en cadencia corta (SC, short cadence, por sus siglas en inglés). Como se puede apreciar en la Figura 3.1, el flujo

graficado en el eje vertical es el mismo para el eclipse secundario y del tránsito, pero es diferente para los dos eclipses primarios. El tiempo graficado en el eje horizontal es el mismo en cada panel, y nos revela la duración mucho más larga del tránsito planetario en comparación a ambos eclipses.

3.1.2 Espectroscopía de Alta Resolución (HRS).

Kepler-453b fue observado desde el Observatorio McDonald con un Espectrógrafo de Alta Resolución (Tull, McQueen, Good, Epps, 1998) en el Telescopio Hobby - Eberly (HET, por sus siglas en ingles), y con el espectrógrafo Tull Coude (Tull, McQueen, Sneden y Lambert, 1995), en el Telescopio Harlan J. Smith de 2.7 m (HJST, por sus siglas en ingles). Las observaciones se realizaron en el 2013 se obtuvieron un total de once espectros durante 47 noches. Los espectros de alta resolución (HRS, por sus siglas en ingles), cubren un rango de longitud de onda 4780 a 6800 Å. De los espectros tomados, se encontraron las siguientes velocidades radiales para la estrella primaria, las cuales se muestran en la Tabla 3.1.

Día Juliano (-2,5455,000)	Velocidad radial (km s ⁻¹)	Incertidumbre (km s ⁻¹)	Telescopio Utilizado
987.95667	-12.065	0.095	HJST Tull
990.93694	-2.892	0.054	HJST Tull
991.93040	0.151	0.040	HJST Tull
1000.96729	0.525	0.033	HET HRS
1002.97067	-4.559	0.036	HET HRS
1009.94932	-18.663	0.025	HET HRS
1013.95060	-15.701	0.034	HET HRS
1016.93457	-7.233	0.028	HET HRS
1019.94404	1.749	0.028	HET HRS
1022.90513	6.082	0.038	HET HRS
1034.89098	-15.616	0.036	HET HRS
1727.97974*	-4.774	0.085	HJST Tull

Tabla 3.1 Velocidades radiales para Kepler-453b. *La mayor parte del análisis realizado por los investigadores de la Universidad de San Diego se completó antes de que se hizo esta observación, por lo que no se utilizó. Tabla extraída del artículo: Kepler-453b: the 10th Kepler transiting circumbinary planet. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

Mediante un modelado fotodinámico, ELC (por sus siglas en inglés) (Orosz y Hauschildt, 2000), se obtuvo la curva de velocidad radial para la estrella primaria (Figura 3.2). En cuanto a la estrella

secundaria ésta es muy débil, de tal manera que no fue posible detectarla en ninguno de los dos espectros.

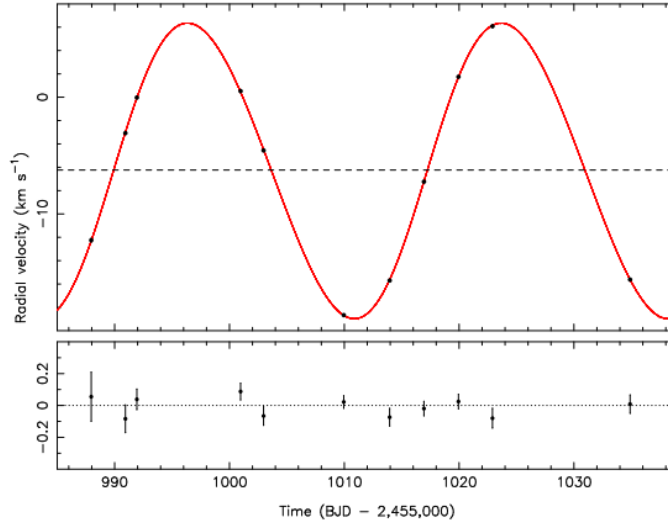


Figura 3.2 Velocidades radiales para la estrella primaria y la curva del modelado fotodinámico (ELC) que mejor se ajusta, representada en función del tiempo. Imagen tomada del artículo: *Kepler 453b - the 10th Kepler transiting circumbinary planet*. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

Varios análisis espectrales independientes se llevaron a cabo utilizando espectros HET, que incluyeron un análisis de clasificación estelar (SPC, por sus siglas en inglés) (Buchhave, Latham, Johansen, A., et al. 2012). Se realizaron análisis similares basados en la utilización del software astronómico MOOG para el sistema KOI-126 (Carter, Fabrycky, Ragozzine, et al., 2011, Tal-Or, Mazeh, Alonso, et al., 2013). Cada uno otorgo resultados similares, la temperatura efectiva T_{eff} de la primaria cuyo mejor ajuste que va en el rango de 5480-5620 K, y metalicidad $[m/H]$ que van de -0.10 a 0.09. De acuerdo con Welsh et al. (2015) en base a los espectros de SPC, se han preferido los valores de $T_{eff} = 5527 \pm 50$ K, $[m/H] = 0.09 \pm 0.08$ y gravedad superficial $\log g = 4.56 \pm 0.10$, dejando un registro de $g = 4.57$. En lo que respecta a la estrella secundaria, esta tiene una masa $M_2 = 0.194 \pm 0.002 M_{\odot}$ y un radio $R_2 = 0.214 \pm 0.001 R_{\odot}$, por lo que es una de las estrellas de menor masa. Estos datos fueron medidos con una precisión menor al 5 % de incertidumbre sobre la masa dinámica y el radio. El modelo fotodinámico (ELC) proporciona una relación de temperaturas de $T_2/T_1 = 0.599$, lo cual combinado con la temperatura efectiva T_{eff} espectroscópicamente medida de 5527 K para la estrella primaria, nos da una temperatura efectiva $T_{eff} = 3309$ K para la estrella

secundaria. Finalmente, la relación de masas del sistema binario es $M_2/M_1 = 0.208 \pm 0.003$. En la Tabla 3.2 se muestran resumidos los parámetros físicos y elementos orbitales del sistema binario, y para el exoplaneta se ilustran en la Tabla 3.3.

Parámetro	Mejor valor	Incertidumbre	Unidades
M_1	0.934	± 0.010	M_\odot
M_2	0.1938	± 0.0020	M_\odot
R_1	0.833	± 0.011	R_\odot
R_2	0.2143	± 0.0014	R_\odot
Periodo orbital P	27.322037	± 0.000017	días
Periodo en conjunto T	-34.574013	± 0.000060	BJD
i	90.275	± 0.052	grados
eSen ω	-0.0506	± 0.0037	
eCos ω	-0.006338	± 0.000016	
e	0.0510	± 0.0037	
ω	262.86	± 0.048	grados
a	0.18479	± 0.00066	UA
T1	5527	± 100	K
T ₂ /T ₁	0.5987	± 0.0010	
T ₂	3309	± 100	K
Log g ₁	4.566	± 0.0050	cgs
Log g ₂	5.0630	± 0.02	cgs

Tabla 3.2 Parámetros físicos y elementos orbitales para el sistema binario Kepler-453. Crédito y cortesía de los datos: William F. Welsh, Jerome A. Orosz, Donald R. Short. Department of Astronomy, San Diego State University.

Parámetro	Mejor valor	Incertidumbre	Unidades
M_p	0.1	± 16	M_\oplus
R_p	6.165	± 0.035	R_\oplus
Periodo orbital P	240.503	± 0.053	Días
Periodo en conjunto T	68.998	± 0.054	BJD
i	89.4338	± 0.0056	Grados
eSen ω	-0.00093	± 0.00020	
eCos ω	-0.03785	± 0.0088	
E	0.0379	± 0.0088	
Ω	-178.59	± 0.29	Grados
a	0.7877	± 0.0028	UA
Ω	2.138	± 0.055	Grados
Inclinación mutua	2.297	± 0.030	Grados

Tabla 3.3 Parámetros físicos y elementos orbitales para el exoplaneta Kepler -453b. Tabla extraída del artículo: Kepler 453b - the 10th Kepler transiting circumbinary planet. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

3.1.3 La órbita del sistema Kepler-453.

El modelo fotodinámico (ELC) predice que la inclinación del planeta oscila con un periodo de 102.8 años, que es también el período de precesión de la órbita del planeta. Para la solución de mejor ajuste, la inclinación del planeta varía según los 4.575° . La conservación del momento angular requiere un plano orbital de la binaria para oscilar también, pero con una menor amplitud de aproximadamente 10° a 5° , lo cual nos proporciona la masa del planeta en el mejor ajuste es casi cero. La Figura 3.3 ilustra la geometría de la binaria y una vista espacial de la rápida precesión de la órbita del planeta.

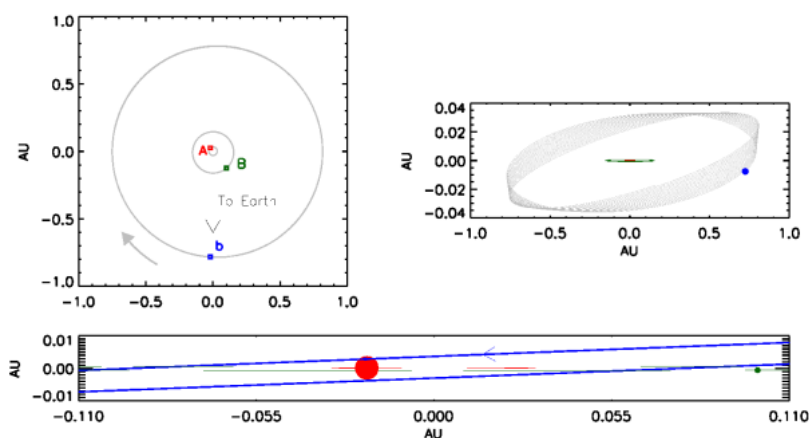


Figura 3.3 La orientación de la órbita del sistema Kepler-453 y su vista desde la Tierra. Imagen tomada del artículo: *Kepler-453b: the 10th Kepler transiting circumbinary planet*. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

Como consecuencia de este cambio de inclinación de la órbita del planeta, el parámetro de impacto del planeta cambiar en una gran cantidad durante un plazo de tiempo relativamente corto, esto trae como consecuencia que el planeta no realice tránsitos siempre; sino que se observa el siguiente patrón: el planeta transita el 50 % del tiempo; tres no tránsitos seguido de tres tránsitos. Sin embargo, el observar estos tránsitos fue muy fortuito (Welsh, Orosz, Short, et al. 2015) debido a la inclinación mutua relativamente grande entre los planos orbitales, la mayoría de las veces el planeta no transita la estrella en conjunción. Los tránsitos sólo se producen cuando el parámetro de impacto, definido como la distancia mínima proyectada de un extremo del planeta al centro de la estrella

primaria durante conjunción, en relación con el radio de la estrella primaria, es menor que la unidad. Lo anterior se produce sólo $8.4\% \pm 0.2\%$ del tiempo.

En la Figura 3.4 se ilustra explícitamente la simulación de la oscilación sinusoidal de la órbita inclinada del planeta, junto con la inclinación mutua, y la evolución del parámetro de impacto del planeta a través de la estrella primaria. Una implicación interesante e importante, es que, debido a las limitaciones de duración de observación, para cada sistema como Kepler-453b vemos que hay aproximadamente 12 sistemas similares que no observamos. Además de los tiempos de tránsito observados, duraciones, y profundidades, en la Tabla 3.4 se incluyen los tiempos de tránsito predichos para un futuro próximo. La escala de tiempo futuro cercano es por necesidad, por lo tanto, se predice que los tránsitos dejarán de ser visibles después de 2015 Julio y no regresan hasta 2066 (Welsh, Orosz, Short, et al. 2015).

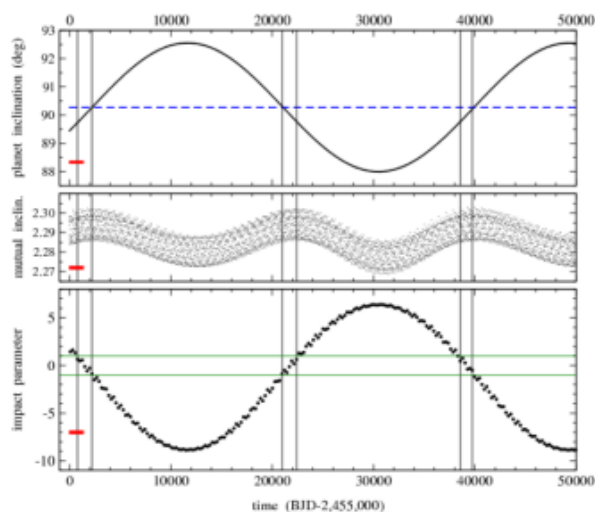


Figura 3.4 El panel superior muestra la oscilación durante 103 años de inclinación orbital del planeta. Para la comparación, las curvas de inclinación orbital de la binaria también se muestran (curva de trazos) y aparece completamente plano en esta escala. El marcador horizontal roja muestra la duración de la misión Kepler. El panel central muestra la inclinación mutua de las órbitas. El panel inferior muestra las variaciones en el parámetro de impacto. Los tránsitos ocurren cuando el parámetro de impacto es menor que la unidad; este criterio se muestra por las líneas horizontales verdes. En cada panel, las líneas verticales entre paréntesis el momento en que el planeta transita la estrella primaria, visto desde la Tierra. Estas ventanas de tránsito, medio de un ciclo de precesión aparte, solamente abarcan 8.4% del ciclo. . Imagen tomada del artículo: Kepler 453b - the 10th Kepler transiting circumbinary planet. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

Número de ciclo	Tiempo de tránsito observado (BJD)	Tiempo de tránsito modelado (BJD)	Duración Observada (hrs)	Duración modelada (hrs)	Profundidad relativa observada	Profundidad relativa modelada
1	69.261	0	0	0	0
2	304.781	0	0	0	0
3	542.223	0	0	0	0
4	781 ± 0.0014	781.8227	5.69 ± 0.17	5.769	0.0042 ± 0.0001	0.0048
5	1019.1749 ± 0.0010	1019.1770	12.50 ± 0.12	12.494	0.0047 ± 0.0001	0.0052
6	1254.7319 ± 0.0007	1254.7312	7.12 ± 0.09	6.978	0.0046 ± 0.0001	0.0051
7	1494.1848	7.2365	0.0055
8	1732.8717	8.9134	0.0051
9	1967.5163	9.9495	0.0054
10	2206.4545	3.3775	0.0030
89	20973.5

Tabla 3.4 Tránsitos a través de la estrella primaria para el sistema Kepler-453b. Imagen tomada del artículo: *Kepler 453b - the 10th Kepler transiting circumbinary planet*. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

3.2 Características generales del sistema circumbinario Kepler-1647.

A diferencia de Kepler-453b, este planeta que gira alrededor del sistema binario eclipsante Kepler-1647 tiene un periodo orbital muy largo (1100 días) y estuvo en conjunción sólo dos veces durante la vida de la misión Kepler (Kostov, et al. 2016). Debido a la configuración singular del sistema, Kepler-1647b no sólo posee, el período de tránsito más largo registrado para un exoplaneta en sistemas circumbinarios; sino también uno de los periodos más largos de planetas en tránsito. Con un radio de $1.06 \pm 0.0R_J$ también es el planeta circumbinario más grande descubierto hasta la presente realización de esta tesis (Kostov, et al. 2016).

El planeta produjo tres tránsitos en la curva de luz del sistema binario Kepler-1647 (uno de ellos durante un eclipse, produciendo un fenómeno de zigzageo), midiendo los tiempos de los eclipses estelares, se estimó su masa en $1.52 \pm 0.65 M_J$. El planeta gira en torno a un período de 11 días alrededor de una binaria eclipsante, que consiste en dos estrellas de tipo solar en un plano con poca inclinación y ligeramente excéntricas ($e_b = 0.16$). A pesar de tener un período orbital tres veces más grande que el de la Tierra, el planeta Kepler-1647b se encuentra dentro de la zona habitable conservadora de la estrella binaria lo largo de su órbita (Kostov, et al. 2016). El sistema Kepler-1647, es un sistema binario eclipsante con una

magnitud de 13.545; una temperatura efectiva estimada de $T_{eff} = 6217K$, gravedad superficial $\log g = 4.052$, metalicidad $[m/H] = -0.78$ (Prsa, et al. 2011, Slawson, et al. 2011, Matijevic, et al. 2012).

3.2.1 Las Curvas de Luz del Sistema Kepler-1647.

La curva de luz de exposiciones del sistema binario Kepler-1647 está bien definida con los eclipses estelares primarios y secundarios, tales eclipses tienen profundidades de aproximadamente 20 % y 17 %, respectivamente, separados por 0.5526 en la fase. En la Figura 3.5 se muestran los eclipses estelares prominentes y el primer tránsito del planeta circumbinario Kepler-1647b.

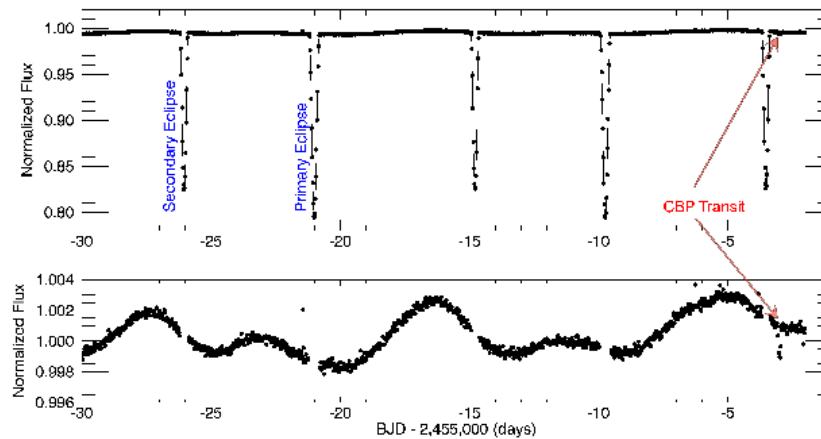


Figura 3.5 Diagrama indicativo del flujo de radiación normalizado que recibe Kepler – 1647b por parte de sus estrellas madre (panel superior). Además, también se ilustran los eclipses primario y secundario por parte del sistema binario y el tránsito que realiza el exoplaneta (acercamiento de escala en el flujo normalizado, panel inferior). Imagen extraída del artículo: Kepler-1647b: The largest and Longest-period Kepler transiting circumbinary planet. Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

La Figura 3.5 muestra en su panel superior una sección representativa de la curva de luz medida en cadencia larga (símbolos negros) que presenta dos eclipses realizados por la estrella primaria, tres eclipses realizados por la estrella secundaria, y el primer tránsito que hace el exoplaneta Kepler-1647b. En el panel inferior se presenta la misma, situación, pero en una situación de acercamiento, en la cual se retiraron los eclipses estelares (espacios vacíos en la curva de luz) y además de que se acentúa la profundidad del tránsito planetario.

3.2.2 Espectroscopía de Alta Resolución (HRS).

Investigaciones previas, han realizado seguimientos espectroscópicos del sistema binario Kepler-1647, dichos estudios se obtuvieron utilizando distintos instrumentos, con el fin de medir las velocidades radiales de los dos componentes del sistema binario (Kostov, Orosz, Welsh, et al. 2016). Las observaciones fueron llevadas a cabo en varios instrumentos: el telescopio de 1.5m en el Observatorio Fred L. Whipple, el espectrógrafo Tull Coude (Tull, McQueen, Sneden y Lambert, 1995), el telescopio Harlan J. Smith de 2.7m del Observatorio McDonald, el espectrómetro de alta resolución Echelle (Vogt, Allen, Bigelow, et al. 1994), el telescopio Keck de 10 m en el Observatorio W. M. Keck y el espectrómetro Echelle Hamilton (HamSpec) (Vogt, 1987) y en el telescopio Shane de 3m en el Observatorio Lick.

De todos estos estudios, se obtuvieron un total de 14 observaciones con Tilling Reflector Echelle Spectograph (TRES), de las cuales se realizaron ocho en 2011, cinco en 2012, y una en 2013. Tales observaciones abarcan el rango de longitudes de onda de alrededor de 390 a 900 nm. Se extrajeron los espectros siguiendo los procedimientos descritos en investigaciones previas realizadas por Buchhave, Bakos, Hartman, et al. (2010). Siete observaciones se realizaron con el espectrógrafo Tull Coude en el 2011, cada una consistente en tres exposiciones de 1.200 segundos. Este instrumento cubre la longitud de onda en un intervalo de 380 a 1000 nm. Dos observaciones se obtuvieron con HIRES (Espectrometro Echelle de alta resolución, por sus siglas en inglés), también en 2011, que cubre el rango de longitudes de onda de 300 a 1000 nm. Por último, dos espectros fueron obtenidos con el espectrógrafo HamSpec en 2011, con una la cobertura de longitud de onda de 385 a 955 nm. Con estos instrumentos fue posible determinar los parámetros de temperatura efectiva, metalicidad, la gravedad superficial para el sistema binario, los cuales se muestran en la Tabla 3.5. De igual forma también se determinaron las velocidades radiales de la binaria Kepler-1647, tales curvas de velocidad radial se ilustran en la Figura 3.6 y en la Tabla 3.6.

Parámetro	Valor	Incertidumbre	Unidad	Método
Periodo orbital	11.25882	0.00060	días	Prsa, et al, 2011
Excentricidad	0.1593	0.0030		Espectroscopía
Argumento del pericentro	300.85	0.91	°	Espectroscopía
Semieje mayor	27.43	0.12	UA	Espectroscopía
M_1	1.210	0.019	R_\odot	Espectroscopía
M_2	0.975	0.010	R_\odot	Espectroscopía
T_1	6210	100	K	Espectroscopía
T_2	5770	125	K	Espectroscopía
Razón de flujo, F_1/F_2	0.22	0.02		Fotometría

Tabla 3.5 Parámetros del sistema binario Kepler-1647. Tabla extraída del artículo: Kepler-1647b: The largest and Longest-period Kepler transiting circumbinary planet. Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

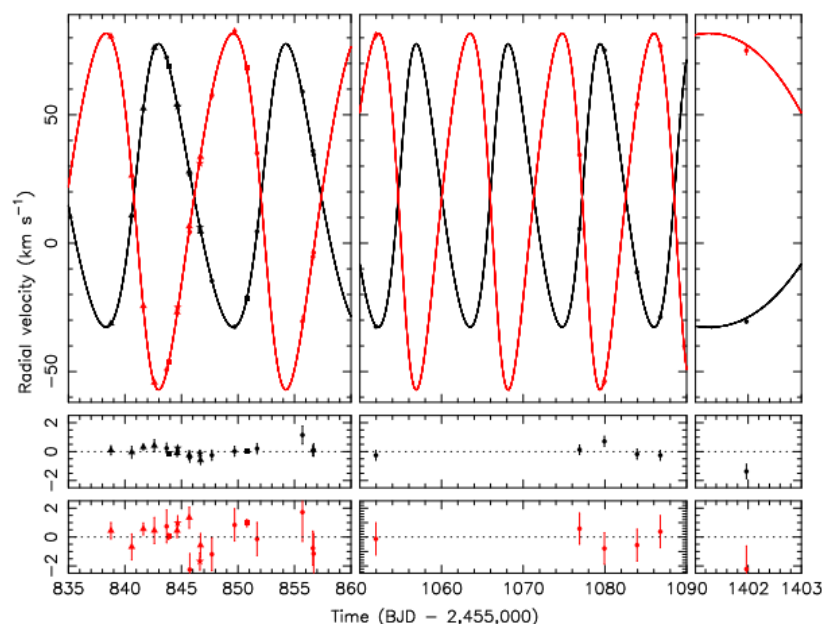


Figura 3.6 Curvas de velocidad radial para los componentes primario y secundario del sistema binario. Paneles superiores: mediciones de velocidad radial para la primaria (símbolos negros) y secundaria (símbolos rojos) estrellas de la EB Kepler-1647 de McDonald 2.7 m (triángulos), Lick 3m (estrellas), Keck I 10m (cuadrados) y los Tillinghast 1.5m telescopios (círculos), y los respectivos ajustes de Kepler (líneas continuas); paneles inferiores: residuos entre ambas curvas de velocidad. Imagen extraída del artículo: Kepler-1647b: The largest and Longest-period Kepler transiting circumbinary planet. Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

BJD UTC - 2,455,000	v1	v2
843.686310 (T)	72.36 ± 0.35	-49.40 ± 1.13
845.737695 (T)	26.66 ± 0.34	4.36 ± 1.11
847.691513 (T)	-14.69 ± 0.35	57.63 ± 1.14
849.698453 (T)	-32.58 ± 0.34	82.50 ± 1.11
851.685281 (T)	4.56 ± 0.35	35.05 ± 1.14
855.705432 (T)	59.01 ± 0.62	-30.46 ± 2.02
856.631747 (T)	35.98 ± 0.36	-5.33 ± 1.18
856.698255 (T)	34.41 ± 0.13	-3.66 ± 1.39
1051.968636 (T)	-32.47 ± 0.34	81.02 ± 1.11
1076.890883 (T)	5.54 ± 0.33	34.40 ± 1.07
1079.943631 (T)	75.13 ± 0.34	-53.85 ± 1.09
1083.935311 (T)	-11.28 ± 0.34	54.03 ± 1.10
1086.775726 (T)	-28.78 ± 0.34	76.87 ± 1.11
1401.968253 (T)	-30.52 ± 0.49	75.03 ± 1.60
838.762187 (M)	-31.27 ± 0.31	80.54 ± 0.56
840.597641 (M)	10.80 ± 0.40	26.34 ± 0.90
842.601830 (M)	76.18 ± 0.41	-54.28 ± 0.90
841.625584 (M)	52.52 ± 0.19	-24.49 ± 0.41
844.616603 (M)	53.94 ± 0.24	-26.92 ± 0.48
845.691457 (M)	27.92 ± 0.31	6.55 ± 0.72
846.687489 (M)	4.52 ± 0.30	33.65 ± 0.82
844.665031 (L)	53.16 ± 0.16	-24.99 ± 0.49
846.633214 (L)	6.15 ± 0.23	31.05 ± 0.59
843.869932 (K)	69.07 ± 0.08	-46.49 ± 0.21
850.792710 (K)	-21.32 ± 0.10	68.47 ± 0.25

Tabla 3.6 Mediciones de velocidad radial para el sistema binario Kepler-1647. A = estrella primaria, B = estrella secundaria. Tabla extraída del artículo: Kepler-1647b: The largest and Longest-period Kepler transiting circumbinary planet. Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

3.2.3 La Órbita del Sistema Kepler-1467.

Kostov, et al. (2016), en sus investigaciones realizadas mediante la técnica de modelado fotodinámico (ELC), propusieron la mejor configuración posible del sistema binario Kepler-1647. En la Figura 3.7 se presenta el diagrama con la configuración orbital (ELC) del sistema Kepler-1647, en este diagrama las órbitas y los símbolos de las dos estrellas en los dos paneles inferiores (rojo para primaria "A" y verde para la secundaria "B") son a escala; los símbolos planetarios en la parte baja dos paneles (color azul) se exageran por un factor de dos para fines prácticos de visualización. Los dos paneles superiores muestran la configuración del sistema a $t_a = 1104.95$ (BJD - 2.455.000). La línea de puntos en el panel superior izquierdo representa la distancia mínima desde la estrella binaria para la estabilidad dinámica.

Los dos paneles inferiores muestran la configuración del sistema (y las respectivas direcciones de movimiento) en dos tránsitos consecutivos durante el mismo conjunto para el planeta: a $t_a = 1104.95$ y al $t_b = 1109.26$ (BJD - 2455000). La orientación de los ejes de coordenadas xz (utilizando la nomenclatura de Murray y Correia, 2011) se indica en la esquina superior izquierda del panel superior izquierdo.

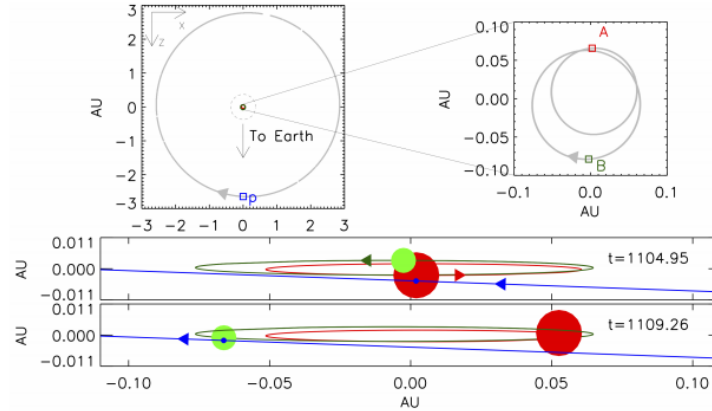


Figura 3.7 La orientación de la órbita del sistema Kepler-1647 y su vista desde la Tierra. Tabla extraída del artículo: *Kepler-1647b: The largest and Longest-period Kepler transiting circumbinary planet*. Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

Finalmente, en cuanto a los parámetros del sistema binario Kepler-1647, tal sistema está formado por dos estrellas con masas de $M_1 = 1.2207 \pm 0.0112M_{\odot}$, y $M_2 = 0.9678 \pm 0.0039M_{\odot}$, y los radios de $R_1 = 1.7903 \pm 0.0055R_{\odot}$ y $R_2 = 0.9663 \pm 0.0057R_{\odot}$, respectivamente. La relación de la temperatura de las dos estrellas es $T_1/T_2 = 0.9365 \pm 0.0033$ y su relación de flujo es $F_1/F_2 = 0.21 \pm 0.02$. Las dos estrellas del sistema binario giran una alrededor de la otra cada 11.25882 días en una órbita con un semieje mayor de $a_b = 0.1276 \pm 0.0002\text{UA}$, excentricidad de $e_b = 0.1602 \pm 0.0004$ e inclinación de $i_b = 87.9164 \pm 0.0145^\circ$. La metalicidad fue estimada en $[m/H] = -0.14 \pm 0.056$ y temperaturas efectivas para las estrellas primaria y secundaria de $T_{\text{eff}} = 6210\text{K}$ y de $T_{\text{eff}} = 5770\text{K}$ respectivamente.

Antes del descubrimiento de Kepler-1647b, todos los planetas descubiertos por la misión Kepler de la NASA, eran de tamaño similar al de Saturno (el más grande es Kepler-34b, con

un radio de $0.76R_J$). Se encontró que tales planetas orbitan a sus sistemas binarios en un factor de dos, en lo que respecta a sus correspondientes límites de estabilidad dinámica. De hecho, Kepler-1647b cuenta con un radio de $R_p = 1.06 \pm 0.01R_J$ ($11.8739 \pm 0.1377R_\oplus$) y una masa de $1.52 \pm 0.6M_J$ ($483 \pm 20M_\oplus$), además como ya se mencionó este planeta tiene el periodo orbital más largo ($P_p = 1107.6$ días). El tamaño y la masa del planeta son consistentes con las predicciones teóricas, las cuales indican que objetos de masa subestelar evolucionan hacia el radio de Júpiter después de aproximadamente 1 Gigaño (Burrows, Hubbard, Lunine, y Liebert, 2001, Spiegel y Burrows, 2013). Hasta la fecha, Kepler-1647b es uno de los planetas con tránsito de mayor duración, lo que demuestra una vez más el potencial de descubrimiento continuo, con observaciones de larga duración, tales como los estudios realizados por la misión Kepler. Finalmente, la órbita del planeta está casi de canto con respecto a la línea de visión respecto a la Tierra ($i_p = 90.0972 \pm 0.0035^\circ$), y tiene un semieje mayor de $a_p = 2.7205 \pm 0.0070$ UA y la excentricidad de $e_p = 0.0581 \pm 0.0689$ (Kostov, et al. 2016).

Capítulo 4

Metodología y modelado numérico.

4.1 Estabilidad dinámica.

La descripción de los sistemas dinámicos se basa en ecuaciones matemáticas, donde se codifican sus características básicas y se identifican las cantidades desconocidas. Encontrar la solución a estas ecuaciones equivale a hacer una descripción del movimiento del sistema, que a su vez proporciona la predicción de su comportamiento futuro y la determinación de su historia pasada. A éste proceso que nos permite encontrar la solución deseada se le denomina integración. Un sistema dinámico que admite una solución matemática se denomina integrable, de lo contrario el sistema se clasifica como no integrable (Celletti y Perozzi, 2007).

En general, se puede considerar la estabilidad orbital como un sinónimo de la capacidad de un objeto de cambiar poco, en el tiempo, sus parámetros orbitales (semieje mayor, excentricidad, e inclinación). En otras palabras, un objeto es estable si las pequeñas variaciones en sus parámetros orbitales no cambian de manera exponencial, en caso contrario varían de forma sinusoidal. La inestabilidad se produce cuando las fuerzas perturbadoras crean cambios drásticos en las variaciones de estos parámetros (Haghighipour, 2004 y Mason, 2008).

El concepto de estabilidad, como se explicó en el párrafo anterior, aunque simple, ha sido definido diferente por distintos autores. Una revisión del concepto realizada por Szebehely en 1984 lista las más de 50 diferentes definiciones para la estabilidad de un objeto en un sistema de múltiples cuerpos (Szebehely, 1984). Harrington (1977) considera que la órbita de un objeto es estable, si al integrar numéricamente la órbita del objeto, su semieje mayor y la excentricidad orbital no sufrirían cambios seculares. Szebehely (1980), Szebehely y McKenzie (1981), por otro lado, consideran las integrales de movimiento y las curvas de

velocidad cero para determinar la estabilidad de un planeta en y alrededor de estrellas binarias. En la presente investigación, se utilizan los valores de la excentricidad orbital de un objeto; así como del semieje mayor para evaluar su estabilidad dinámica. Un objeto se considera estable si, durante la integración de su órbita, el valor de su excentricidad orbital es menor a uno; lo que hace que el planeta (en este caso) no colisione con otros cuerpos, y no salga del campo gravitatorio de su estrella anfitriona. Como ya se indicó previamente en esta investigación, para analizar la estabilidad de un planeta es necesario considerar el tipo de órbita que describe alrededor del sistema binario. Esto es que el planeta puede describir tres tipos de órbitas: tipo S, tipo P y tipo T, Szebehely (1980), Dvorak (1982) y Schwarzschild (2016). Sin embargo, los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b describen órbitas tipo P, por lo que se les considera sistemas circumbinarios; por consiguiente, se utilizará el criterio de estabilidad para este tipo de órbita.

Gran cantidad de simulaciones numéricas se han llevado a cabo anteriormente para analizar la estabilidad de los planetas en órbitas de tipo P en los sistemas binarios, por citar algunos casos (Ziglin, 1975, Szebehely y McKenzie, 1981, Dvorak, 1984 y 1986, Dvorak, Froeschlé y Froeschlé, 1989, Kubala, Black y Szebehely, 1993, Holman y Wiegert, 1999, Broucke, 2001, Pilat-Lohinger, Funk y Dvorak, 2003, Musielak, Cuntz, Marshall y Stuit, 2005). A fin de que un planeta de tipo P pueda considerarse estable, este tiene que estar a una distancia segura de las dos estrellas de modo que sería inmune de sus efectos de perturbación que le pudieran ocasionar ambas. De tal manera podemos decir que, los planetas a grandes distancias desde el centro de masa de un sistema binario tendrán una mejor oportunidad de ser estables. Esta distancia, sin embargo, no puede ser demasiado grande, debido a que, si el planeta se encuentra a distancias muy grandes, otros efectos astronómicos, tales como la perturbación galáctica, y las perturbaciones debidas a estrellas que pasan cerca de él, pueden hacer que la órbita del planeta se vuelva inestable (Haghighipour, 2004 y Mason, 2008). Por lo tanto, es de vital importancia considerar el semieje mayor crítico del planeta, el cual definiremos más adelante.

Tal como se había indicado en el Capítulo 1 de esta tesis, el primer planeta descubierto alrededor de un sistema binario, fue Kepler-16b (Doyle, Carter, Fabrycky, et al. 2011). De hecho, su estabilidad orbital fue analizada por el mismo Doyle y sus colaboradores en 2011. Ellos integraron numéricamente la solución por un tiempo durante dos millones de años y concluyeron que no existen desviaciones significativas en la distancia orbital que podrían conducir a la inestabilidad del planeta (Chavéz, Georgakarakos, Prodan, et al. 2015). La estabilidad dinámica del sistema Kepler-16 también fue investigada por Jaime, Pichardo y Aguilar (2012). Este equipo de investigadores determinó que el planeta Kepler-16b, se encontraba en un área de estabilidad, pero no muy alejada de un área de inestabilidad. A partir de este momento se introdujo el concepto de mapa de estabilidad, es decir, mostrar las regiones del espacio próximas al sistema binario en donde el planeta pueda encontrarse en un área de estabilidad (Chavéz, Georgakarakos, Prodan, et al. 2015). Popova y Shevchenko (2013) investigaron la estabilidad de Kepler-16b, mediante la construcción de mapas de estabilidad basados en el concepto de exponente Lyapunov y en un criterio denominado “*escape de colisiones*”, según el cual una órbita puede ser clasificada como estable si la distancia entre el planeta y una de las estrellas, no es menor de 10^{-3} UA o mayor a 103 UA. Encontraron que el planeta Kepler-16b se encuentra justo fuera de la zona caótica, entre algunas zonas de movimiento caótico correspondiente a ciertas resonancias medias de movimiento.

Cuando Welsh, Orosz, Carter, et al. (2012), anunciaron el descubrimiento de los planetas Kepler-34b y Kepler-35b, también realizaron una serie de integraciones numéricas con el fin de evaluar la estabilidad de ambos sistemas planetarios. Utilizando las soluciones orbitales nominales, realizaron la integración directa considerando el problema de *n-cuerpos*, a un tiempo de 10 millones de años. Welsh, Orosz, Carter, et al. (2012), no encontraron ningún indicio de inestabilidad en los dos planetas. En cuanto a Kepler-38b, Orosz, Welsh, Carter, et al. (2012), ponen prueba la estabilidad del sistema mediante la realización de simulaciones de *n-cuerpos* directos y encontrando también que el planeta es estable.

Kostov, McCullough, Hinse, et al. (2013) y Kostov, McCullough, Carter, et al. (2014), utilizaron el mapa de estabilidad denominado crecimiento exponencial por método órbitas cercanas (MEGNO, por sus siglas en inglés), para investigar la estabilidad de los sistemas Kepler-64 y Kepler-413. De nueva cuenta, los dos planetas fueron encontrados dentro de sus zonas de estabilidad dinámica. Un muy completo artículo sobre análisis de estabilidad de los sistemas circumbinarios Kepler-16, Kepler-34, Kepler-35, Kepler-38, Kepler-64 y Kepler-413, fue desarrollado por Chavéz, Georgakarakos, Prodan, et al. (2015). En tal artículo, después de realizar y estudiar las integraciones numéricas de las ecuaciones de movimiento a 10 millones de años, los resultados respaldan los análisis de estabilidad previamente realizados. Todos estos planetas circumbinarios se encuentran en zonas de estabilidad dinámica. En esta investigación, se analiza la estabilidad dinámica de los sistemas Kepler-453 y Kepler-1647, los cuales constan de un par de estrellas binarias y un planeta, ambos sistemas en órbitas tipo P. Al igual que los trabajos de investigación previos, el análisis de la estabilidad se lleva a cabo mediante integraciones numéricas, cuya estructura y modelado se explican en la sección 4.2.

4.1.1 Consideraciones y condiciones iniciales de integración.

Las integraciones numéricas de las ecuaciones del movimiento planetario para Kepler-453b y Kepler 1647-b, se realizan en las instalaciones del departamento de posgrado de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME), en la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL). Para realizar las integraciones, se utilizan los servidores denominados Ganimedes, Europa y Encelado. Dichos servidores son los encargados de realizar los experimentos de las simulaciones numéricas, durante el periodo de diciembre de 2016 a febrero de 2017. El integrador simpléctico utilizado para esta investigación fue desarrollado por Mikkola (1997), pero que fue modificado por Georgakarakos (2015). Esta última versión fue la utilizada en nuestros experimentos numéricos. El código del integrador simpléctico está descrito en lenguaje FORTRAN, al cual solo se le realizan modificaciones en los parámetros físicos tanto estelares como planetarios, y elementos orbitales de cada sistema binario.

El Integrador Mikkola (1997), desarrolla las ecuaciones del movimiento de los sistemas circumbinarios en forma hamiltoniana. Para esto utiliza las coordenadas y velocidades respecto al baricentro, así como también, los parámetros físicos y orbitales de cada sistema binario. Este integrador es capaz de resolver las ecuaciones del movimiento como función del tiempo, y encontrar los valores de los elementos orbitales en función del mismo. El código del integrador utilizado para esta investigación se muestra en el apéndice 1.

Tal y como se verá más adelante, las integraciones numéricas suponen para Kepler-453b y Kepler-1647b lo siguiente:

- Órbitas del sistema binario y planeta consideradas como coplanares.
- Las condiciones iniciales de ambos sistemas fueron tomadas de estudios previos realizados a estos sistemas binarios. Estas condiciones iniciales se listan en las Tablas 4.1 a 4.4, de la siguiente sección.

4.2 Metodología científica e integración numérica.

Para analizar la estabilidad dinámica de los sistemas planetarios circumbinarios Kepler-453 y Kepler-1647, comenzamos utilizando el problema de 3 cuerpos, y bajo este contexto se realizan las integraciones numéricas de las ecuaciones de movimiento (Murray y Dermott, 1999). Considerando la Figura 4.1, en la cual tenemos representados los vectores de posición de los tres cuerpos con masas M_1 , M_2 y M_p , respecto a un origen fijo O , \mathbf{R}_c , \mathbf{R}_i , y \mathbf{R}_j respectivamente. Además, \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j denotan los vectores de posición de las masas M_2 y M_p , relativas a la masa M_1 .

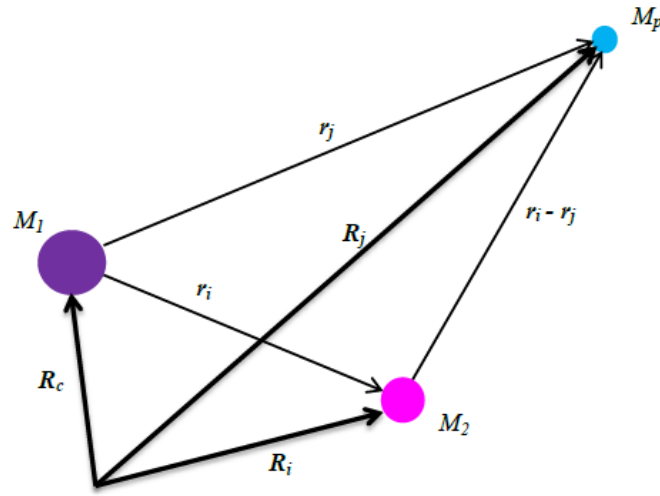


Figura 4.1 Sistema de coordenadas jacobianas para la determinación de las ecuaciones del movimiento planetario.

De la Figura 4.1 \mathbf{r}_i y \mathbf{r}_j denotan los vectores posición de las masas de la estrella secundaria M_s y masa del planeta M_p con respecto a la primaria, donde:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2} \quad , \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2} \quad (4.1)$$

y

$$|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (4.2)$$

siendo la estrella primaria el origen del sistema coordenado. De las leyes del movimiento de Newton y la Ley de Gravitación obtenemos las ecuaciones del movimiento de las tres masas en el marco de referencia inercial:

$$\text{Estrella Primaria} \quad M_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = G M_1 M_2 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} + G M_1 M_p \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \quad (4.3)$$

$$\text{Estrella secundaria} \quad M_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = G M_2 M_p \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - G M_2 M_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \quad (4.4)$$

$$\text{Planeta} \quad M_p \ddot{\mathbf{R}}_p = G M_p M_1 \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} - G M_p M_2 \frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} \quad (4.5)$$

Las aceleraciones de la secundaria y el planeta relativas a la primaria están dadas por:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1 \quad (4.6)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{R}}_p - \ddot{\mathbf{R}}_1 \quad (4.7)$$

Con el fin de modelar el comportamiento a largo plazo de los sistemas planetarios Kepler-453 y Kepler-1647, debemos reescribir las ecuaciones del movimiento planetario en forma hamiltoniana, esto es debido a que es la forma matemática requerida en un integrador simpléctico, como es el que se va a utilizar en esta investigación. Para lograr este propósito hacemos uso de las variables de Delaunay, las cuales son un conjunto de variables canónicas en mecánica celeste. Considerando el caso de un sistema coplanar de tres cuerpos como es el caso de los sistemas planetarios Kepler-453 y Kepler-1647, estas variables quedan definidas en la forma siguiente (Marchal, 1990):

$$L_1 = m n_1 a_1^2 \quad , \quad l_1 \quad (4.8a)$$

$$L_2 = \mu n_2 a_2^2 \quad , \quad l_2 \quad (4.8b)$$

$$G_1 = L_1 \sqrt{1 - e_1^2} \quad , \quad g_1 = \varpi_1 \quad (4.8c)$$

$$G_2 = L_2 \sqrt{1 - e_2^2} \quad , \quad g_2 = \varpi_2 \quad (4.8d)$$

donde: a_i , e_i , ϖ_i y l_i son los semiejes mayores, las excentricidades, las longitudes del pericentro y anomalías medias para estrella primaria ($i=1$) y para la estrella secundaria ($i=2$) respectivamente. También es necesario considerar como la masa total del sistema la siguiente condición:

$$M = \sum_{i=0}^2 M_i \quad (4.9)$$

Utilizando estas variables el Hamiltoniano para un sistema jerárquico triple se denota algebraicamente como (Georgarakakos & Eggl, 2015); (Mikkola, 1999):

$$H = K + R \quad (4.10)$$

Con la energía kepleriana $K = H_1 + H_2$, correspondiente al par de estrellas binarias y el perturbador hamiltoniano $R = H_p$, correspondiente al planeta circumbinario. La ecuación (4.10) toma entonces la forma:

$$H = H_1 + H_2 + H_p \quad (4.11)$$

donde:

$$H_1 = -\frac{G^2 M_1^3 M_2^3}{2(M_1 + M_2)L_1^2} \quad (4.12)$$

es la energía kepleriana de la órbita de la estrella primaria,

$$H_2 = -\frac{G^2 (M_1 + M_2)^3 M_p^3}{2M L_2^2} \quad (4.13)$$

es la energía kepleriana de la órbita de la estrella secundaria,

$$H_p = GM_p \left(\frac{M_1 + M_2}{R} - \frac{M_1}{r_{12}} - \frac{M_2}{r_{2p}} \right) \quad (4.14)$$

es el Hamiltoniano perturbador correspondiente al planeta circumbinario, en términos de las coordenadas jacobianas r y R entre M_1 y M_2 , y M_2 y M_p respectivamente. \mathbf{R} es el vector que conecta el centro de masas de la binaria con el planeta o tercer cuerpo.

La integración de las ecuaciones del movimiento consiste en derivar con respecto al tiempo los Hamiltonianos dados por las ecuaciones (4.12) a (4.14) y resolverlos numéricamente durante el intervalo de integración de 1Ga; con esto podemos modelar el comportamiento a largo plazo de las órbitas de los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b. La solución numérica de los Hamiltonianos nos otorga como resultado las variaciones de los vectores posición \mathbf{r} y velocidad $\dot{\mathbf{r}}$, a través del tiempo de integración (Mikkola 1997). El siguiente paso de la metodología para completar la determinación de la órbita y por consiguiente su evolución temporal, es con los datos de posición y velocidad producidos por las integraciones, obtener los elementos orbitales para los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b.

Denotando los vectores posición y velocidad para ambos planetas como $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ y $\dot{\mathbf{r}}_p = (\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p)$, sus magnitudes o módulos están dados por:

$$r_p = \sqrt{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_p} \quad , \quad \dot{r}_p = \sqrt{\dot{\mathbf{r}}_p \cdot \dot{\mathbf{r}}_p} \quad (4.15)$$

Para el objetivo de esta investigación solo consideraremos la evolución temporal de los elementos orbitales del planeta, semieje mayor a_p y excentricidad e_p .

- Semieje mayor

$$a_p = \frac{1}{\frac{2}{r_p} - \frac{\dot{r}_p^2}{\mu}} \quad (4.16)$$

donde $\mu = G(M_1 + M_2)$

- Excentricidad

$$e_p = \sqrt{\left(1 - \frac{r_p}{a_p}\right)^2 + \frac{r_p \cdot \dot{r}_p}{\sqrt{\mu a_p}}} \quad (4.17)$$

En base a los resultados tanto del semieje mayor como de la excentricidad planetarias como función del tiempo, representaremos gráficamente su evolución a largo plazo de 1Ga para ambos planetas. En la Figuras 4.2 y 4.3 se muestra la evolución temporal a largo plazo para Kepler-64b.

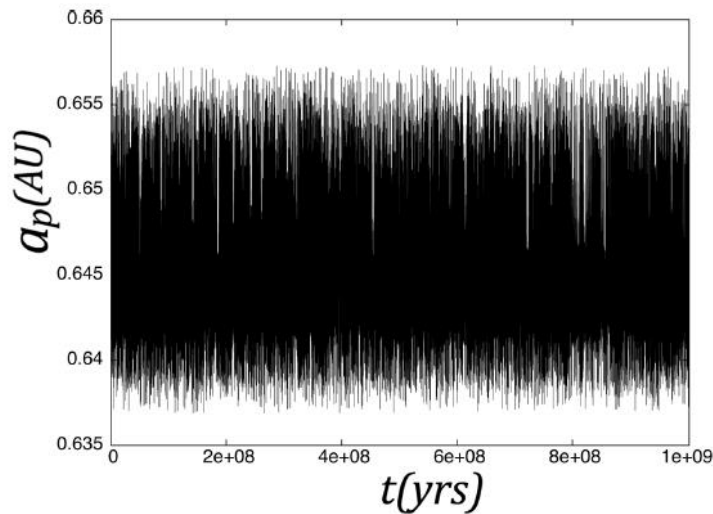


Figura 4.2 Evolución del semieje mayor para Kepler-64b basado en Kostov et al. (2013). Gráfico tomado de: A dynamical stability study of Kepler circumbinary planetary systems with one planet Chávez et al. (2015).

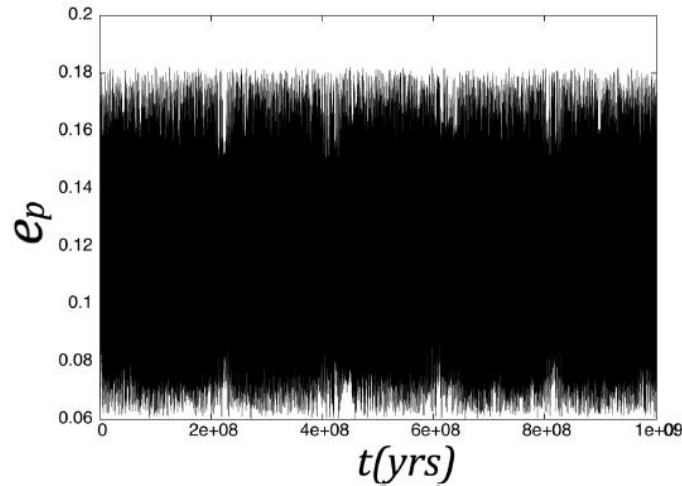


Figura 4.3 Evolución de la excentricidad para Kepler-64b basado en Kostov et al. (2013). Gráfico tomado de: *A dynamical stability study of Kepler circumbinary planetary systems with one planet* Chávez et al. (2015).

El análisis de la estabilidad de los sistemas circumbinarios, objeto de investigación de la presente tesis se realiza mediante tres experimentos, que se describen a continuación.

- **Experimento 1. Integración de las ecuaciones de movimiento de los dos sistemas Kepler.**

En este primer experimento, se utiliza la solución orbital nominal de los dos sistemas circumbinarios, mediante las ecuaciones 4.12 a la 4.14, y se integran numéricamente durante un periodo de tiempo de 1 Ga. Esta cantidad de tiempo ha sido elegida para nuestro trabajo, debido a que es una fracción considerable del tiempo en el que las estrellas permanecerán en la secuencia principal. Otra razón a tomar en cuenta es que este intervalo de tiempo es mucho más largo en comparación con la mayoría de los estudios anteriores (≤ 10 Ma). Todas las órbitas se asumieron como coplanares, esto es debido a que ambos sistemas objeto de la investigación tienen una inclinación mutua del orden de sólo unos pocos grados y el uso de un modelo tridimensional tendría un efecto insignificante sobre el resultado (Doolin y Blundell, 2011) y (Georgakarakos, 2013). Las condiciones iniciales de los sistemas para nuestras integraciones numéricas fueron obtenidas de la literatura, y se basan en las coordenadas y velocidades con respecto al centro de masas del sistema binario

o baricentro. Para el caso del sistema Kepler-453 (Welsh, Orosz, Short, et al., 2015), tenemos los parámetros ilustrados en la Tabla 4.1, y para el sistema Kepler-1467 (Kostov, Orosz, Welsh, et al., 2016), los parámetros se listan en la Tabla 4.2.

Parámetro	Estrella primaria	Estrella secundaria	Planeta
$M(M_{\odot})$	$9.3376812027940 \times 10^{-1}$	$1.9379521129221 \times 10^{-1}$	$1.8590153330241 \times 10^{-7}$
$x(\text{UA})$	$-9.748504997497 \times 10^{-3}$	$4.6971059746704 \times 10^{-2}$	$4.1279280833250 \times 10^{-1}$
$y(\text{UA})$	$1.5295158904949 \times 10^{-4}$	$-7.369785770015 \times 10^{-4}$	$8.6134166399839 \times 10^{-3}$
$z(\text{UA})$	$-3.189393768140 \times 10^{-2}$	$1.5367598493600 \times 10^{-1}$	$-6.871064103438 \times 10^{-1}$
$v_x(\text{UA/día})$	$6.6236370559505 \times 10^{-3}$	$-3.191484642184 \times 10^{-2}$	$1.7657373471432 \times 10^{-2}$
$v_y(\text{UA/día})$	$1.0028478727687 \times 10^{-5}$	$-4.832118534056 \times 10^{-5}$	$7.5627225101695 \times 10^{-4}$
$v_z(\text{UA/día})$	$-2.091184985444 \times 10^{-3}$	$1.0075997405916 \times 10^{-2}$	$9.8264693713782 \times 10^{-3}$

Tabla 4.1 Parámetros de coordenadas y velocidades baricéntricas para el sistema Kepler – 453. Válida en el momento de referencia época de 2,454, 964.00 BJD (o tiempo = -36.00 si se utiliza BJD-2455000). (x , y) son los ejes en el plano del cielo, y la dirección z apunta hacia el observador. Tabla tomada del artículo: Kepler 453b - the 10th Kepler transiting circumbinary planet. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

A partir de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento, obtenemos la evolución de los elementos orbitales como función del tiempo. De tal forma, que se pueden construir sus respectivos diagramas de estabilidad orbital.

Parámetro	Estrella primaria	Estrella secundaria	Planeta
$M(M_{\odot})$	1.22067659415220042	0.96776600149647484	$1.451597910614 \times 10^{-3}$
$x(\text{UA})$	$-3.787225016445 \times 10^{-2}$	$4.780546769804 \times 10^{-2}$	$-2.393016683247 \times 10^{-2}$
$y(\text{UA})$	$-1.592384646402 \times 10^{-3}$	$2.013985786858 \times 10^{-3}$	$-3.637581199071 \times 10^{-3}$
$z(\text{UA})$	$-4.558842424966 \times 10^{-2}$	$5.353717646101 \times 10^{-2}$	2.64347531964575655
$v_x(\text{UA/día})$	$1.975677944271 \times 10^{-4}$	$-2.489618166441 \times 10^{-2}$	$-1.581709334209 \times 10^{-2}$
$v_y(\text{UA/día})$	$-8.532538087501 \times 10^{-4}$	$1.075391204440 \times 10^{-3}$	$5.648308255780 \times 10^{-4}$
$v_z(\text{UA/día})$	$-2.344181821752 \times 10^{-2}$	$2.956940151935 \times 10^{-2}$	$-9.525037985014 \times 10^{-4}$

Tabla 4.2 Parámetros de coordenadas y velocidades baricéntricas para el sistema Kepler – 1647. Válida en el momento de referencia época de 2,454, 964.00 BJD (o tiempo = -36.00 si se utiliza BJD-2455000). (x , y) son los ejes en el plano del cielo, y la dirección z apunta hacia el observador. Tabla tomada del artículo: Kepler 1647b: The largest and Longest-period Kepler transiting circumbinary planet. Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

- **Experimento 2. Búsqueda del semieje mayor crítico planetario.**

En el segundo experimento numérico, se realiza la búsqueda del semieje mayor crítico planetario, es decir, el semieje mayor planetario más pequeño para el cual, el planeta, se encontraría en una órbita estable en torno del sistema binario. Esto es, justo antes de la órbita del planeta se vuelva inestable por primera vez conforme nos acercamos al par de estrellas binarias. Para realizar la búsqueda del semieje mayor crítico, denotado en esta tesis como a_c , se utilizan los elementos orbitales para cada sistema, los cuales se muestran para ambos sistemas binarios en la Tabla 4.3, y para cada exoplaneta en la Tabla 4.4 (Welsh, Orosz, Short, et al., 2015), y (Kostov, Orosz, Welsh, et al., 2016):

Sistema	$M_1-M_2 (M_\odot)$	a_b (UA)	e_b	i_b (°)	w_b (°)
Kepler- 453	0.934-0.1938	0.18479	0.0510	90.275	262.86
Kepler-1647	1.2207-0.9678	0.1276	0.1602	87.9164	300.85

Tabla 4.3 Resumen de los elementos orbitales para los sistemas binarios Kepler-453 y Kepler-1647. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015) y Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016), respectivamente.

Planeta	M_p	a_p (UA)	e_p	i_p (°)	w_p (°)
Kepler- 453b	0.1 (M_\oplus)	0.0028	0.0088	89.4338	-178.59
Kepler- 1647b	1.52 (M_J)	2.7205	0.0581	90.0972	155.04

Tabla 4.4 Resumen de los elementos orbitales para los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b. Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015) y Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016), respectivamente.

El cálculo del semieje mayor crítico para los dos sistemas Kepler objeto de investigación, se realizará de dos formas, primero utilizando los resultados de algunas investigaciones anteriores, como, por ejemplo, la fórmula empírica de Holman y Wiegert (1999). Ellos ya abordaron el problema de la estabilidad dinámica en sistemas binarios para órbitas tipo P y tipo S. Complementaron los trabajos de Dvorak (1984), al realizar simulaciones numéricas con partículas en órbitas casi circulares alrededor del sistema binario, de estas integraciones

dedujeron una expresión para encontrar el semieje mayor crítico a_c de la partícula o planeta (Haghighipour, 2004 y Mason, 2008). La expresión para el criterio de estabilidad en orbitas tipo P es la siguiente:

$$\begin{aligned} a_c/a_b = & (1.60 \pm 0.04) + (5.10 \pm 0.05)e_b + (4.12 \pm 0.09)\mu + (-2.22 \pm 0.11)e_b^2 \\ & + (-4.27 \pm 0.17)e_b\mu + (-5.09 \pm 0.11)\mu^2 \\ & + (4.61 \\ & \pm 0.36)e_b^2\mu^2 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Donde a_b y e_b son el semieje mayor y la excentricidad de la binaria respectivamente, y μ esta denotada como la razón de masas del sistema binario, es decir:

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} \quad (4.19)$$

Siendo M_1 y M_2 , las masas de las estrellas primaria y secundaria respectivamente del sistema binario.

En la ecuación 4.7, la razón de masas del sistema binario tiene un rango de $0.1 \leq \mu \leq 0.9$; y la excentricidad de la binaria está en el rango de $0.0 \leq e \leq 0.8$.

La segunda forma de obtener el semieje mayor crítico comienza con los elementos orbitales de cada sistema, los cuales aparecen en las Tablas 4.3 y 4.4, nosotros variamos únicamente el semieje mayor planetario con el objetivo de encontrar el valor para el cual la órbita del planeta sería inestable por primera vez, al tiempo que nos acercamos más al sistema binario. Estas simulaciones se llevarán a cabo con un periodo de integración de 10^5 años. Para cada valor del semieje mayor, el planeta fue integrado inicialmente a ocho distintas posiciones iniciales, es decir, la anomalía verdadera está dada en valores de 0° a 360° con un espaciado de 45° . Si la órbita se vuelve inestable en una o más de las posiciones iniciales, entonces, para cada valor del semieje mayor, la órbita planetaria será clasificada

como inestable. Los resultados obtenidos se comparan con la formula semi – analítica de Mardling y Aarseth (2001), la cual se describirá en el siguiente capítulo.

- **Experimento 3. Búsqueda de áreas de inestabilidad.**

Finalmente, en el tercer experimento numérico, realizamos la búsqueda de áreas de inestabilidad en un plano q_p vs e_p , donde e_p es la excentricidad del planeta inicial y q_p es la distancia al pericentro inicial del planeta, para cada uno los dos sistemas Kepler. Para esto, se construirá una cuadrícula de 101×91 , correspondiente al mismo número de puntos (q_p, e_p) , con un rango de e_p de 0 a 0.9. Luego, se realizará una elección razonable para los valores de q_p con los cuales se podrán realizar las integraciones y construir sus respectivos mapas de estabilidad. Esta elección se realiza mediante la ecuación siguiente (Chávez, comunicación privada, 2016):

$$q_p = a_p(1 - e_p) \quad (4.20)$$

donde a_p y e_p son el semieje mayor y la excentricidad de los planetas circumbinarios. De la misma forma que en la búsqueda del semieje mayor crítico, el planeta comienza sus integraciones en ochos diferentes valores de la anomalía verdadera. Cuando una de estas posiciones iniciales nos lleva a una órbita planetaria inestable, entonces el punto específico (q_p, e_p) será clasificado como inestable, y podremos pasar al siguiente par de valores (q_p, e_p) . Adicionalmente vamos a utilizar las integraciones numéricas realizadas para las soluciones nominales, con el fin de comprobar si o no estas soluciones nominales se encuentran cerca de una resonancia exacta; tal y como lo define Murray y Dermott (1999); por medio de la ecuación 4.9:

$$\varphi = j_1(n' + \epsilon') + j_2(n + \epsilon) + j_3\omega' + j_4\omega + j_5\Omega' + j_6\Omega = 0 \quad (4.21)$$

Decimos que el cuerpo perturbado está en resonancia exacta cuando la variación de tiempo de un particular argumento resonante, φ , es exactamente cero. Esto implica que para este caso existe una particular combinación lineal de movimientos propios y tasas de precesión tal que $\dot{\varphi} = 0$, es decir, un particular conjunto de valores de j_1, j_2, \dots, j_6 .

Por lo tanto, de la ecuación 4.9, si se desprecian las contribuciones de todas las variaciones de longitudes, la resonancia exacta ocurre cuando:

$$j_1 n' + j_2 n \approx 0 \quad (4.22)$$

Donde $j_1 = p + q$ y $j_2 = -p$, aquí p y q son enteros positivos, y q es el orden de la resonancia.

Con el fin de realizar nuestras simulaciones numéricas en los tres experimentos, utilizaremos el integrador simpléctico con transformación de tiempo desarrollado por Mikkola (1997), el cual está especialmente diseñado para integrar sistemas triples jerárquicos. El código de este integrador utiliza coordenadas estándar de Jacobi y calcula los vectores relativos de posición y de velocidad de cada planeta de los sistemas Kepler, para cada paso de tiempo. Entonces, utilizando las ecuaciones estándar del problema de dos cuerpos, podemos calcular los elementos orbitales de los dos sistemas binarios Kepler-453 y Kepler-1647.

En esta investigación, todos los cuerpos son tratados como masas puntuales y únicamente se considerarán interacciones gravitacionales de tipo newtoniano. Efectos de relatividad general serán completamente despreciados. No obstante, la aproximación de tratar a los cuerpos como masas puntuales, en particular para la binaria interior, debe ser tomada con algunas precauciones. Efectos de marea de las estrellas, así como efectos a causa de relatividad general, pueden sin embargo llegar a afectar la dinámica de los dos sistemas binarios (Soderhjelm, 1984, Eggleton, Kiseleva y Hut, 1998, Kiseleva, Eggleton y Mikkola, 1998, Borkovits, Forgács-Dajka y Regály, 2004). Estos efectos serán discutidos en el siguiente Capítulo.

Capítulo 5

Resultados y análisis de estabilidad dinámica.

5.1 Evolución de los elementos orbitales a largo plazo.

Presentamos los resultados de nuestras integraciones numéricas a largo plazo. Tal y como se había señalado en la sección 4.2, las soluciones orbitales nominales de los sistemas circumbinarios Kepler fueron integradas para que avancen en el tiempo durante 1Ga. Durante nuestras simulaciones ninguno de los dos sistemas demostró alguna señal de inestabilidad para las condiciones iniciales utilizadas, lo cual coincide con los estudios de estabilidad dinámica realizados por Welsh, Orosz, Short, et al. (2015), para el sistema Kepler-453. Este comportamiento se muestra en la Figura 5.1.

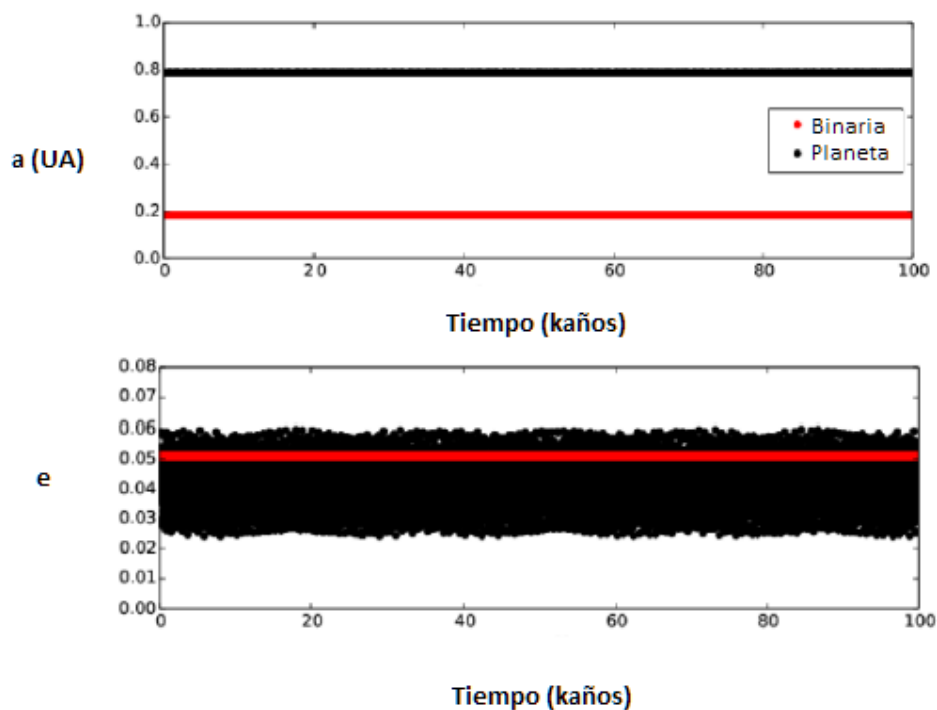


Figura 5.1 Evolución del semieje mayor y la excentricidad para Kepler-453b, basados en los estudios de Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

El mismo comportamiento estable se obtiene al integrar las ecuaciones de movimiento para Kepler-1647b, de la misma manera que lo estudiaron Kostov, Orosz, Welsh, et al. (2016). En la Figura 5.2, se muestra la variación a través del tiempo, para el semieje mayor del planeta y la excentricidad del sistema Kepler-1647.

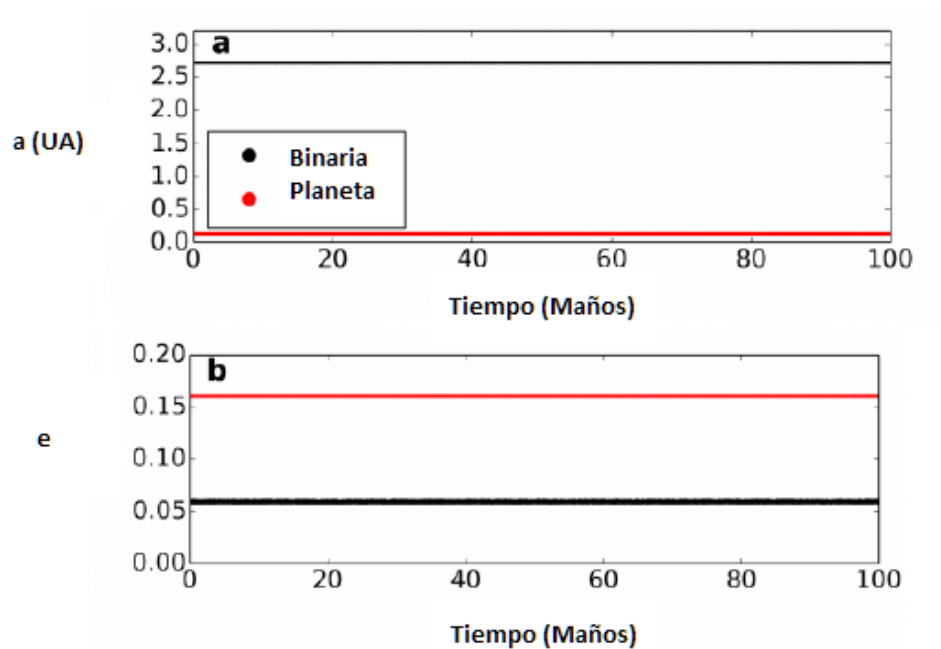


Figura 5.2 Evolución del semieje mayor y la excentricidad para Kepler-1647b, basados en los estudios de Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

Para el sistema Kepler-453b, los valores máximos y mínimos del semieje mayor planetario se mantienen estables alrededor de 0.8 UA, lo cual concuerda con el valor nominal de 0.7877 UA reportado en la literatura por Welsh, Orosz, et al. (2015). En el caso de la excentricidad, la gráfica de la Figura 5.1, nos muestra un comportamiento a través del tiempo, en donde los valores nunca exceden el máximo de 0.06 y el mínimo de 0.025. Aquí

el valor nominal reportado en literatura por Welsh, Orosz, Short, et al. (2015), para la excentricidad es de 0.0379.

En lo que respecta al sistema Kepler-1647, los valores máximos y mínimos del semieje mayor del planeta se mantienen estables alrededor de 2.75 UA; el cual es bastante cercano al valor nominal de 2.7205 UA obtenido por Kostov, Orosz, Welsh, et al. (2015). La excentricidad muestra una estabilidad a través del tiempo en un valor aproximado de 0.06, el cual al compararlo con el valor reportado por Kostov, Orosz, Welsh, et al. (2016) de 0.0581. Lo cual es indicativo de que se han realizado de forma correcta de las ecuaciones de movimiento de ambos sistemas. De tal manera que, después de analizar el comportamiento proporcionado por la solución numérica de las integraciones de las ecuaciones del movimiento, para ambos sistemas, y observando el comportamiento tanto de la excentricidad, como del semieje mayor de cada planeta, se puede concluir que ambos planetas se mantienen estables durante un periodo de tiempo de 1Gigaaño.

5.2 Búsqueda del semieje mayor crítico.

Después de analizar la estabilidad a largo plazo de los dos sistemas circumbinarios, ahora procedemos a encontrar el semieje mayor crítico del planeta para cada sistema mediante las dos formas descritas en el capítulo 4. También como se había comentado en tal capítulo, se realiza a manera de agregado al cálculo del semieje mayor crítico planetario de ambos sistemas, una comprobación utilizando el criterio de semi-analítico de Mardling y Aarseth (2001).

Mardling y Aarseth (2001), abordaron el problema de la estabilidad de un sistema jerárquico triple, al notar que la estabilidad contra el escape en el problema de tres cuerpos era análogo al de la estabilidad contra el intercambio caótico de energía en el problema de las mareas de las binarias. La forma en que la energía y el momento angular son intercambiados entre las dos órbitas, es similar a la forma en que se intercambia en una binaria que es sometida a una interacción caótica marea-órbita. Considerando lo anterior, Mardling y

Aarseth, derivaron una fórmula semi-analítica para obtener el valor crítico de la distancia al pericentro externo $R_p^{crit.}$:

$$R_p^{crit.} = C \left[(1 + q_{out}) \frac{1 + e_{out}}{1 - e_{out}} \right]^{2/5} a_{in} \quad (5.1)$$

donde:

$$q_{out} = \frac{M_p}{M_1 + M_2}, \quad q_{out} \leq 5 \quad (5.2)$$

En la ecuación 5.1, e_{out} es la excentricidad exterior de la binaria y a_{in} es el semieje mayor interior también de la binaria. Si $R_p^{crit.} \leq R_p^{out}$, entonces el sistema será considerado como estable. La constante C fue determinada aproximadamente y se le asignó un valor de 2.8. En la Tabla 5.1, se muestran los resultados obtenidos para el semieje mayor crítico mediante integración numérica, la fórmula de Holman-Wiebert y el criterio de Mardling y Aarseth.

Planeta	Nominal (UA)	Numérico (UA)	Holman y Wiegert (UA)	Mardling y Aarseth (UA)
<i>Kepler-453b</i>	0.7877	0.44799	0.43886	0.5582
<i>Kepler-1647b</i>	2.7205	0.63693	0.37096	0.4522

Tabla 5.1 Semieje mayor crítico planetario para *Kepler-453b* y *Kepler-1647b*.

De la Tabla 5.1, se puede apreciar claramente que ambos planetas, *Kepler-453b* y *Kepler-1647b*, pueden ser considerados en órbitas estables, ya que cumplen con los criterios de estabilidad de las ecuaciones 4.6 y 5.1, además de que son aproximados a los resultados obtenidos mediante la integración a largo plazo de las ecuaciones de movimiento de ambos sistemas (columna de valor numérico). Lo anterior, es patente cuando se comparan los resultados obtenidos por los criterios de Holman y Wiegert (1999), y Mardling y Aarseth (2001); en donde se puede apreciar claramente que tales resultados, junto con los

obtenidos de las integraciones numéricas, son menores al semieje mayor nominal reportado en investigaciones previas.

5.3 Mapas de estabilidad.

En esta sección presentamos los resultados del tercer experimento numérico que fue realizado, el cual consistió en la construcción de mapas de estabilidad para los sistemas planetarios, objeto de nuestra investigación. La forma en cómo vamos a lograr esto es encontrando áreas estables e inestables en un plano q_p vs. e_p . Los valores de e_p y q_p ilustran en la Tabla 5.2. Cabe aclarar que los resultados para q_p fueron calculados con la ecuación 4.8 para cubrir estos valores calculados, se grafica en el eje horizontal de 0.2 a 0.8 en el caso de Kepler-453b y de 0 a 2.8 en el caso de Kepler-1647b. La excentricidad planetaria, e_p se consideró en un rango de 0 a 0.8 para ambos sistemas circumbinarios. Entonces para construir los mapas de estabilidad q_p vs. e_p , se introducen estos parámetros de q_p , y e_p y mediante programación en Mathematica (Chavez, et al., 2017 en comunicación privada), se realizan los mapas.

Planeta	a_p (UA)	e_p	q (UA)
<i>Kepler-453b</i>	0.7877	0.0375	0.7581
<i>Kepler-1647b</i>	2.7205	0.0581	2.5624

Tabla 5.2 Semieje mayor, excentricidad y distancia al pericentro para los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b.

Las áreas denotadas por puntos negros muestran las órbitas planetarias inestables, en cambio, el área blanca representa la zona considerada estable. La localización de la solución nominal para ambos sistemas es denotada por un círculo rojo cerrado. También se indican por medio de líneas rojas, la localización de varias resonancias de movimiento medio entre el sistema binario y el planeta. Las resonancias son del tipo $k : 1$, con k en un rango de 4 a 14. En éste experimento, cada punto de la cuadrícula fue integrado por 10^5 años.

Como nos ocupamos de sistemas que consisten en dos estrellas y un planeta, una simulación estable puede requerir una muy larga integración en la escala de tiempo, y algunas veces las señales de inestabilidad no pueden llegar a aparecer de forma evidente rápidamente, pero se vuelven notables después de un número significativo de periodos seculares. Sin embargo, para los dos sistemas Kepler, los periodos planetarios seculares de movimiento son del orden de unas pocas décadas y por lo tanto, con nuestro tiempo de integración de 10^5 años es suficiente para investigar la estabilidad de los dos sistemas.

Los mapas de estabilidad obtenidos para cada sistema, después de la integración de las ecuaciones de movimiento a 10^5 años en las Figuras 5.3 para Kepler-453b y en la Figura 5.4 y 5.5, en el caso de Kepler-1647b.

Como se puede apreciar en la Figura 5.3, el planeta Kepler-453b (punto rojo), está ubicado en una zona de estabilidad (parte blanca del mapa), entre dos resonancias exactas, a 0.76 UA de su estrella anfitriona. Claramente se aprecia que el planeta está en una ubicación que es altamente estable, además Kepler-453b, se localiza fuera de la zona de resonancias. También, es conveniente notar que aparece un hueco en las áreas de inestabilidad. La explicación a este hecho, es que esta zona no fue barrida adecuadamente durante la integración numérica, no obstante, no representa ningún factor que modifique o produzca errores en nuestro análisis dinámico. La situación que se ilustra en la Figura 5.4, nos da una comprobación del porque Kepler-1647b, es el planeta Kepler con el periodo más largo detectado hasta ahora. El planeta (punto rojo), se aprecia a una distancia de 2.56 UA de su estrella anfitriona. El planeta es altamente estable (zona blanca) y además se encuentra muy lejos las líneas de resonancia (líneas rojas). Sin embargo, se incluye un mapa de estabilidad más para este planeta, donde aparecen en acercamiento las líneas de resonancia, debido a que estudios previos, mencionan la posible existencia de otro planeta en la zona de resonancias Kostov, Orosz, Welsh, et al. (2015).

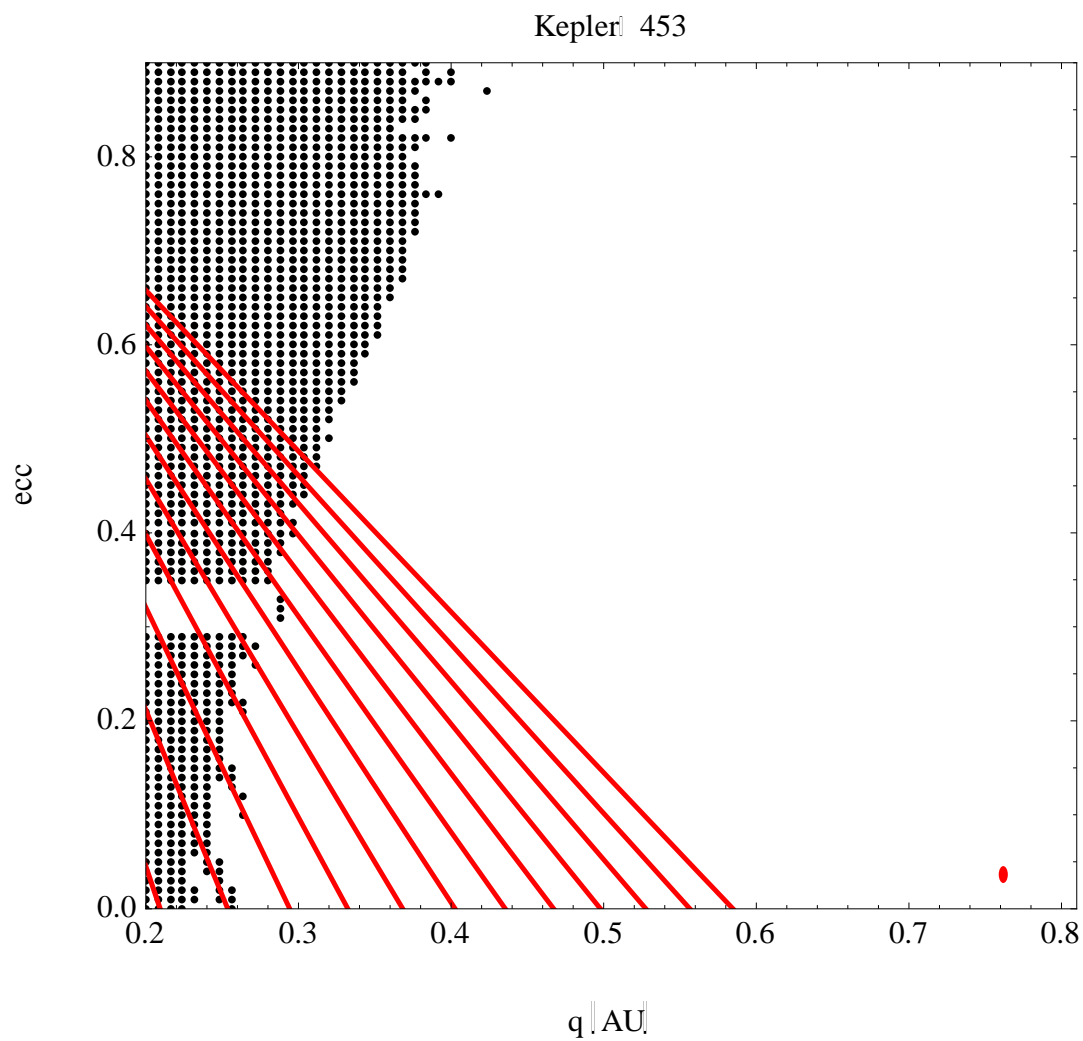


Figura 5.3 Mapa de excentricidad vs distancia al pericentro para Kepler-453b.

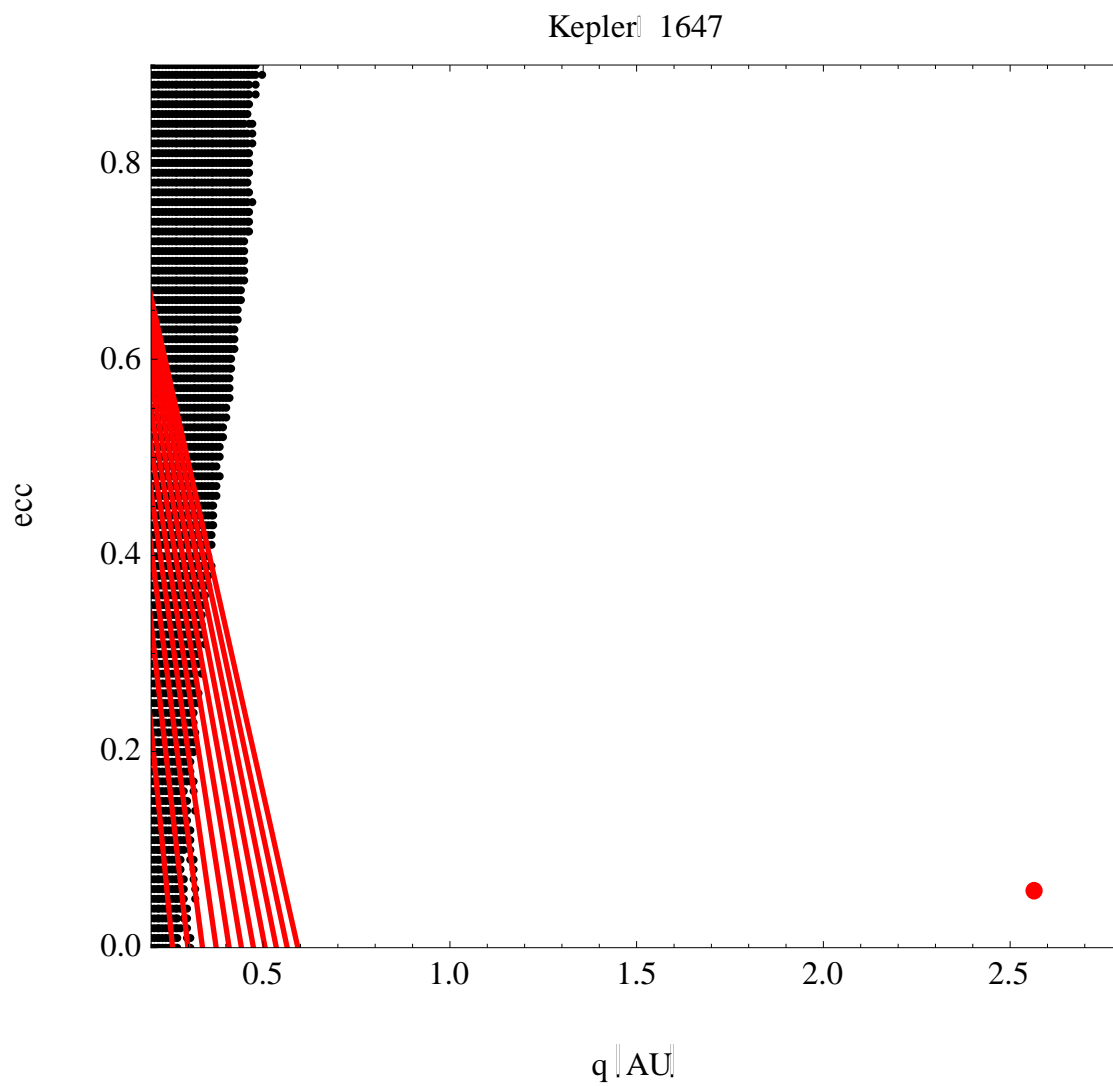


Figura 5.4 Mapa de excentricidad vs distancia al pericentro para Kepler-1647b.

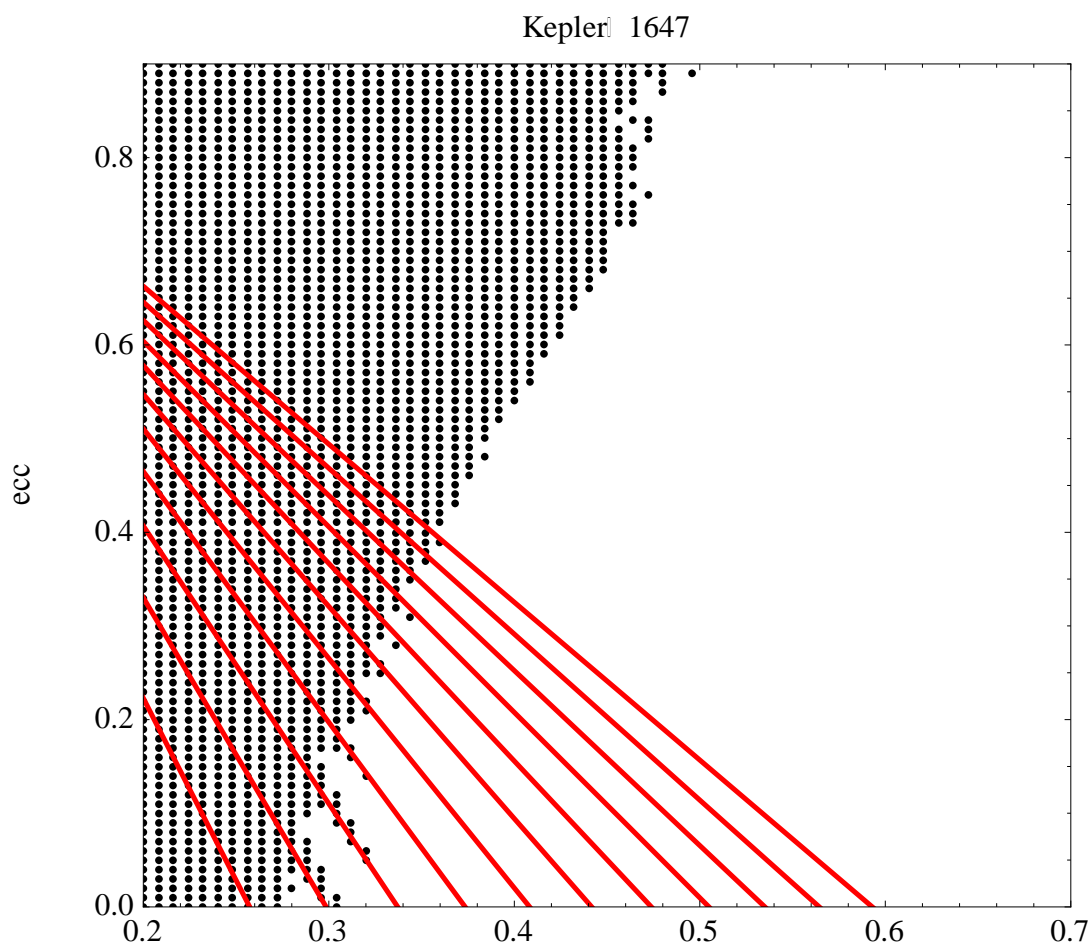


Figura 5.5 Acercamiento del mapa de excentricidad vs distancia al pericentro para Kepler-1647b. Nótese, que ha sido modificada la escala de q , para dar énfasis a las líneas de resonancia, en donde esta predicha la existencia de un hipotético planeta Kepler-1647c.

Capítulo 6

Discusión, conclusiones y trabajo a futuro.

6.1 Discusión.

Después de presentar los resultados obtenidos en nuestros experimentos numéricos, podemos comenzar ahora con la interpretación de tales resultados. Primero, en lo correspondiente a la integración numérica de las ecuaciones de movimiento planetario, nuestras simulaciones, no indicaron ninguna inestabilidad dinámica, para el periodo de tiempo de 1 Ma. Esto se aprecia en las Figuras 5.3-5.5 del capítulo anterior y en las líneas horizontales o comportamiento tipo senoidal de las Figuras 5.1 y 5.2, los cuales se construyeron en estudios previos (Welsh, Orosz, Short, et al. 2015, Kostov, Orosz, Welsh, et al. 2016), para una escala menor de tiempo (105 años).

En segundo lugar, la búsqueda del semieje mayor crítico del planeta se realizó en base a integrar las ecuaciones de movimiento planetario a 10^5 años, produciendo valores de a_c para cada planeta. Analizando a Kepler-453b, las integraciones numéricas nos proporcionan valores de a_c de 0.44799 UA, esto significa, que, a ésta distancia de su estrella anfitriona, el planeta por primera vez se encontraría en una órbita estable. De hecho, si se observa la Figura 5.3, se puede apreciar que a esa distancia dejan de existir zonas de estabilidad o puntos negros, en el mapa q_p vs. e_p . Después se aplicaron los criterios de estabilidad de Holman y Wiegert (1999), y Mardling y Aarseth (2001). Al comparar los resultados de estos criterios con nuestra solución numérica, claramente se puede observar la semejanza entre los tres resultados calculados. Cabe aclarar que el criterio de Mardling y Aarseth (2001), proporciona resultados un poco mayores que los otros dos criterios de estabilidad, por lo tanto, se puede decir que el planeta Kepler-453b, es estable, bajo los criterios utilizados en el segundo experimento numérico.

Analizando a Kepler-1647b, las integraciones nos proporcionan valores de a_c de 0.63693 UA, esto significa, que, a esta distancia de su estrella anfitriona, el planeta por primera vez

se encontraría en una órbita estable. Este valor obtenido al compararlo con el mapa de estabilidad q_p vs. e_p , esta lejos de donde terminan las zonas inestables (aproximadamente 0.5 UA). No obstante, hay que hacer notar que para Kepler-1647b, los criterios de estabilidad de Holman y Wiegert (1999), y Mardling y Aarseth (2001), presentan resultados con valores menores a 0.5 UA. Podría decirse que existe una discrepancia entre el valor numérico y los criterios semi-analíticos, sin embargo, hay que hacer notar que la excentricidad del planeta es de 0.0581, es muy baja, y por ende, es necesario considerar solo la parte baja del mapa de estabilidad. Así que con esta aclaración, podemos asumir con toda certeza que el planeta Kepler-1647b, es estable bajo los criterios utilizados en el segundo experimento numérico.

En el último experimento numérico, la construcción de mapas de estabilidad q_p vs. e_p , nos lleva en ambos casos a indicar que ambos planetas se encuentran en zonas estables, lejos de las zonas de inestabilidad. Estos estudios concuerdan claramente con los realizados en investigaciones previas. Iniciamos con Kepler-453b, este planeta se encuentra ubicado fuera de la zona de resonancias, por lo que no es posible obtener un ángulo resonante φ . Welsh, Orosz, Short, et al. (2015), realizaron un estudio distinto de estabilidad dinámica, denominado MEGNO (Mean Exponential Growth Factor of Nearly Orbits, por sus siglas en inglés), el cual se ilustra en la Figura 6.1. Los resultados obtenidos en nuestro mapa de estabilidad y el obtenido por MEGNO, son claramente congruentes en la ubicación estable de Kepler-453b. El planeta Kepler-1647b, en su respectivo mapa de estabilidad (Figura 5.5), aparece como un punto rojo demasiado alejado de las zonas inestables y de resonancias, por lo tanto, es estable bajo el tiempo de integración considerado en esta tesis. Kostov, Orosz, Welsh, et al. (2016), también estudiaron este planeta bajo el indicador MEGNO (Figura 6.2), donde claramente se puede apreciar un hueco amarillo, indicativo de una amplia zona de estabilidad que alberga a Kepler-1647b. De nuevo, existe una concordancia entre nuestros mapas de estabilidad y los realizados en investigaciones previas.

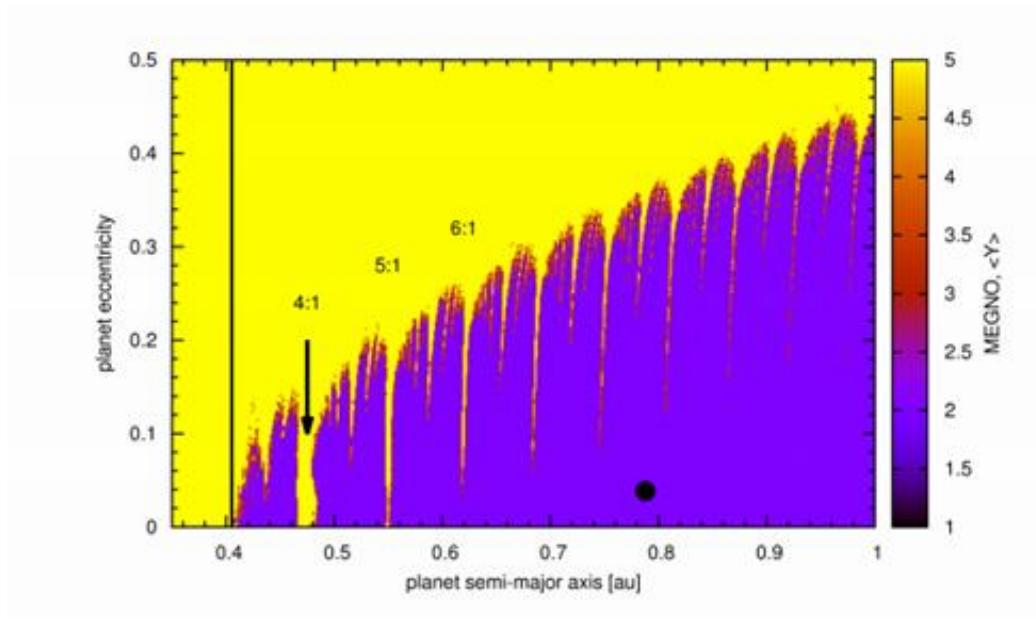


Figura 6.1 Mapa del indicador MEGNO para Kepler-453b, basado en el estudio de Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015).

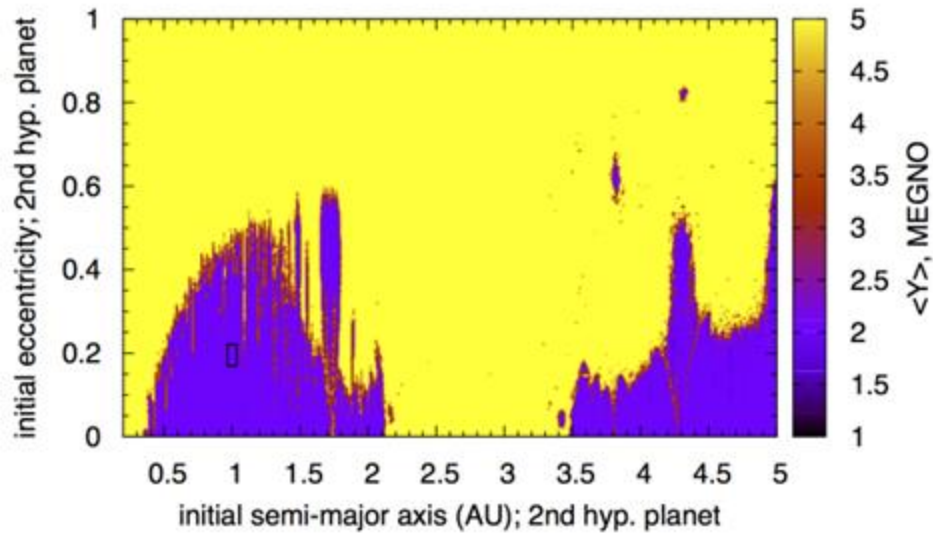


Figura 6.2 Mapa del indicador MEGNO para Kepler-1647b, basado en el estudio de Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016).

Para terminar esta discusión, es necesario realizar un estudio para revisar el efecto de la evolución de mareas y relatividad general en ambos sistemas. Como se ha indicado en el Capítulo 4, las simulaciones fueron realizadas bajo la consideración de que los planetas eran tratados como masas puntuales. Sin embargo, cuando la separación de la binaria es del orden de unos pocos radios estelares, la fricción de marea puede tener un efecto considerable, particularmente, si el sistema experimenta fases evolutivas con alta excentricidad. Las fuerzas de marea pueden afectar la evolución orbital del sistema binario, que, a su vez, puede tener un efecto significativo en la órbita planetaria. En otras palabras, la órbita también puede verse afectada por la forma no esférica que las estrellas adquieren debido a los efectos de marea y debido a la rotación alrededor de sus ejes.

Finalmente, los efectos por relatividad general pueden también jugar un rol importante en la evolución orbital del sistema binario. Esto se presenta como la frecuencia adicional debida a la precesión de la longitud del pericentro, afectando la evolución orbital de la binaria.

6.2 Conclusiones.

En esta presente tesis, se ha investigado la estabilidad dinámica de dos sistemas circumbinarios Kepler, que constan de un solo planeta. Los sistemas estudiados tienen como nombre Kepler-453b y Kepler-1647b, a los cuales se les integraron numéricamente sus ecuaciones de movimiento. Las órbitas de estos sistemas se asumieron como coplanares (binaria-planeta), y la investigación se basó en tres experimentos numéricos.

En el primer experimento, integramos la solución nominal de cada sistema circumbinario, utilizando como parámetros orbitales, los indicados en sus respectivos artículos donde se anunció su detección (revisar Capítulo 4 de la presente tesis). La integración numérica se realizó con una escala de tiempo de 1Gigaaño, esta escala utilizada es mucho mayor que la utilizada en investigaciones previas realizadas para ambos casos (100 Ma). Nuestras simulaciones numéricas mostraron que los dos sistemas circumbinarios, resultaron ser

estables para la escala de tiempo utilizada en la integración de sus respectivas ecuaciones de movimiento.

El segundo experimento numérico, se enfocó en la búsqueda del semieje mayor crítico planetario. La integración se realizó en este experimento para una escala de tiempo de 10^5 años. Esta escala fue mucho más grande la escala de tiempo utilizada en estudios previos. Luego, se realizó la comparación de nuestros resultados con los correspondientes resultados de Welsh, Orosz, Short, et al. (2015) y Kostov, Orosz, Welsh, et al. (2016). También, se compararon los resultados que obtuvimos de semieje mayor crítico, con los criterios de estabilidad de Holman y Wiegert (1999), y Mardling y Aarseth (2001). Las comparaciones mostraron que los resultados obtenidos en esta investigación, indican que ambos planetas, tienen su órbita ubicada en regiones de estabilidad dinámica, lejos de zonas de inestabilidad.

Finalmente en el tercer experimento, se construyeron los mapas de estabilidad q_p vs. e_p . Las simulaciones para la construcción de estos mapas fueron realizadas a una escala de tiempo de 10^5 años. Estas simulaciones mostraron que los planetas Kepler-453b y Kepler-1647b, se encuentran en zonas de alta estabilidad dinámica. En el caso de Kepler-453b, se encontró que el planeta se encuentra aun dentro de la zona de resonancias, ubicado entre 0.7 y 0.8 UA. El estar ubicado lejos de las líneas rojas de resonancias, le confiere al planeta una gran estabilidad dinámica. Para el caso de Kepler-1647b, se encontró que el planeta se encuentra bastante lejos de la zona de resonancias e inestabilidad, ubicado a 2.6 UA. Por estas razones, Kepler-1647b, es un planeta que se puede considerar como estable bajo el tiempo de integración utilizado en esta tesis.

Los estudios realizados en esta investigación también nos indicaron, si pudiera existir un planeta más en cada uno de los sistemas Kepler analizados. Considerando el análisis dinámico de Kepler-453b, los tránsitos que se han registrado en la literatura, y los que están predichos hasta ahora (Welsh, Orosz, Short, et al. 2015), no han vislumbrado variaciones en el tiempo de transito planetario (VTT). Esto es indicativo de que el planeta Kepler-453b, no tiene ningún compañero planetario, en base a nuestros estudios dinámicos. En cambio al

considerar a Kepler-1647b, los análisis muestran que es posible la existencia de un posible planeta compañero, ubicado en la zona de resonancias aproximadamente a 1 UA de la estrella binaria (Kostov, Orosz, Welsh, et al. 2016). La ubicación de este hipotético planeta, se puede apreciar en el mapa de la figura 6.2. No obstante, este sistema tiene predicho un tránsito muy próximo (julio 2017), de tal manera, que, si se llega a presentar una VTT, se podría estar confirmando la existencia de un planeta Kepler-1647c.

6.3 Trabajo a futuro.

La investigación dinámica llevada a cabo en esta base, solo es la base de una amplia variedad de estudios que se pueden realizar con los sistemas circumbinarios Kepler-453b y Kepler-1647b. Algunas propuestas de trabajo a futuro para dichos sistemas podrían ser las siguientes:

- Investigar el proceso de formación planetaria en ambos sistemas, considerando también los modelos de migración estocástica, que llevan a los planetas a situarse dentro de la zona de resonancias o fuera de ella.
- Modelar variaciones en los tiempos de tránsito (VTT), para ver si es posible encontrar un posible planeta compañero o en su defecto un satélite.
- Realizar una simulación numérica, colocando entre las estrellas binarias un hipotético segundo planeta en cada sistema, es decir, un planeta en una órbita tipo S.
- Incluir inclinación a la órbita del planeta, es decir, dejar de lado la consideración de que las órbitas del planeta y binaria están en el mismo plano.
- Realizar estudios, introduciendo los efectos de relatividad general.
- Realizar estudios mediante métodos de dinámica no lineal, específicamente con el indicador de caos, mediante el máximo exponente de Lyapunov (MLE, por sus siglas en inglés).

Apéndices

A.1 Definiciones básicas de dinámica lineal.

La dinámica es un término general que engloba todos los métodos de descripción y que predicen el movimiento de sistemas de fluidos y partículas. Los sistemas planetarios, para fines prácticos y propósitos de comprender su movimiento, pueden considerarse como partículas; por lo tanto, estos pueden ser descritos, comprendidos y caracterizados por ecuaciones conocidas como las ecuaciones de movimiento (leyes de movimiento y de gravitación universal). Estas ecuaciones predicen las posiciones y las velocidades de los planetas como función del tiempo, es decir, su evolución. La evolución puede ser de dos tipos:

- Periódica: el movimiento es repetitivo en una escala de tiempo dada (figura A.1).
- Caótica: el movimiento no es repetitivo (figura A.2).

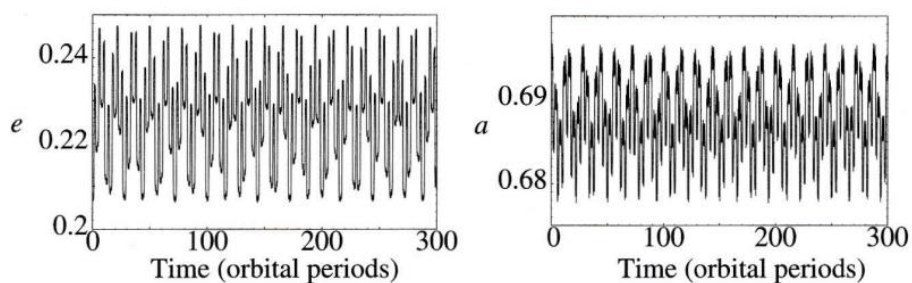


Figura A.1 Un ejemplo de una órbita periódica. Murray y Dermot, (1999).

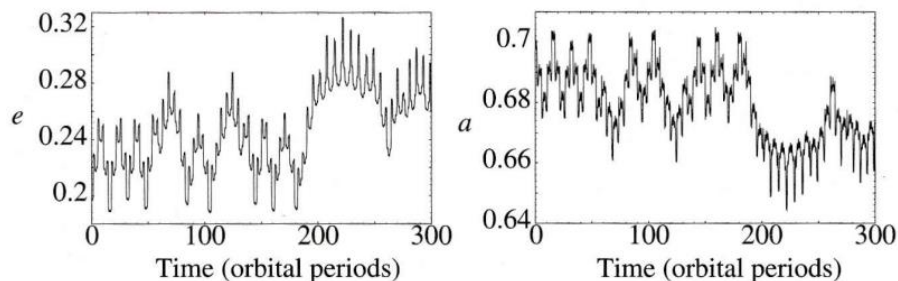


Figura A.2 Un ejemplo de una órbita caótica. Murray y Dermot, (1999).

El descubrimiento de exoplanetas nos ha provisto de nuevos ejemplos de comportamiento dinámico, que no se ha presentado en planetas de nuestro Sistema Solar. Estos nuevos sistemas planetarios revelan que el Sistema Solar, es similar y distinto a la vez, al compararlo con otros sistemas extrasolares. Para muchos sistemas planetarios, la dinámica clásica de partículas puntuales es una aproximación bastante real del movimiento de los planetas; aunque las órbitas de algunos pocos planetas de muy corto periodo orbital son afectadas por fuerzas de marea o relatividad general.

A.1.1 Conceptos básicos de análisis dinámico.

Los análisis dinámicos pueden ser divididos en tres categorías: analíticos, semi-analíticos y n-cuerpos. En las investigaciones analíticas, se deben de realizar un mayor número de consideraciones, pero las ecuaciones resultantes pueden ser resueltas a lápiz y papel. En los desarrollos semi-analíticos se realizan algunas consideraciones para producir ecuaciones analíticas, pero las ecuaciones a menudo pueden ser resueltas únicamente por métodos numéricos. Los métodos de n-cuerpos usan computadoras para calcular las fuerzas gravitacionales entre todos los cuerpos involucrados, y así, determinar sus movimientos, además de obtener la variación de las posiciones y velocidades respecto al tiempo.

Los métodos analíticos y semi-analíticos generalmente ignoran cambios en periodos cortos de tiempo, que se situaran en promedio a cero, en escalas de tiempo largas. Estos métodos modelan las ecuaciones orbitales a largo plazo, no las actuales posiciones de los planetas proveen también una visión sobre el cómo los sistemas podrán comportarse. Dado que estos métodos tienen términos individuales cuyos valores numéricos pueden ser calculados, la relativa importancia de cada efecto de ser cuantificada. La desventaja de estos métodos es que a menudo solo son precisos en ciertos regímenes, por ejemplo: baja excentricidad. Mas términos pueden ser añadidos a una descripción analítica para mejorar su eficiencia, pero eventualmente la complejidad es mayor que la ventaja de promedio en periodos cortos de tiempo. En estas situaciones es mucho mejor optar por simulaciones numéricas. Estas integraciones de n-cuerpos están basadas en un primer principio, el resolver las leyes fundamentales de gravitación y el movimiento de los cuerpos, además son

autoconsistentes. Las simulaciones de n-cuerpos son frecuentemente usadas como prueba de validación de resultados analíticos y semi-analíticos.

Los poderosos cálculos computacionales limitan los tiempos de las simulaciones y/o el número de cuerpos que pueden ser considerados; pero para muchos sistemas los cambios en las formas de las órbitas son periódicas, y las ecuaciones que describen el movimiento necesitan ser integradas para un periodo $\geq 10^5$ años, para revelar la dinámica. En suma, los métodos analíticos aproximan el movimiento a largo plazo ($\geq 1\text{Ga}$), y las simulaciones de n-cuerpos muestran el verdadero comportamiento. Cuando son usados apropiadamente, estos dos enfoques nos proveen de una poderosa visión acerca de la dinámica de los sistemas planetarios.

A.1.2 Métodos analíticos.

La base de los métodos analíticos es la consideración de la función disturbio, la cual se define como la diferencia entre el potencial gravitacional de un planeta debido a su estrella, y también debido a la estrella y uno o más planetas adicionales (Murray y Dermott, 1999).

$$R = \mu' \sum S(a, a', e, e', i, i') \cos \varphi \quad (\text{A. 1})$$

donde φ está dado por la ecuación 4.9:

$$\varphi = j_1(n' + \epsilon') + j_2(n + \epsilon) + j_3\omega^{\sim'} + j_4\omega^{\sim} + j_5\Omega' + j_6\Omega = 0$$

Los métodos analíticos pueden describir dos fenómenos frecuentemente vistos en sistemas planetarios:

- Resonancia.
- Evolución secular.

La resonancia y la evolución secular asumen que ciertos términos en la serie serán promediados a cero, y por lo tanto, pueden ser ignorados cuando se modelan órbitas. La teoría secular ignora todos los términos que dependen del movimiento propio n (la

frecuencia orbital, si el planeta está en una órbita circular); en muchos casos, todos los términos son de orden 3 o más altos. La teoría de la resonancia añade todos los términos que dependen de los movimientos propios, pero únicamente aquellos relacionados con la resonancia en cuestión.

A.1.3 Integraciones de *n*-cuerpos.

El método más preciso para determinar la evolución de un sistema es conocido como un cálculo de *n*-cuerpos. Aunque es más preciso que los métodos analíticos, este no provee una investigación con términos que puedan ser interpretados, y pueden requerir sustanciales recursos computacionales.

En general, un código de *n*-cuerpos resuelve ecuaciones diferenciales de segundo orden de aceleración debida a la gravedad. La precisión es relevante por dos factores:

- El tamaño del paso de tiempo, Δt .
- El orden de la integración, el cual es una medición de la precisión del método en sí mismo.

Los códigos de *n*-cuerpos actualizan unas coordenadas, $r(t)$ a $r_0 + v_r \Delta t$, donde r_0 es la posición de inicio del tiempo de paso, y v_r es la velocidad en el inicio paso de tiempo, la cual es determinada de una manera análoga a la aceleración. Este es un ejemplo de un esquema de primer orden. Esquemas de alto orden involucran cálculos de posiciones, velocidades y aceleraciones más frecuentemente a través del paso de tiempo. Ello tiene elevada precisión, pues tenemos más términos y más cálculos. Dado que el orden se incrementa, la ganancia fraccional de precisión disminuye, la cual crea un óptimo orden para algoritmos: el orden que maximiza la velocidad, pero que minimiza la truncación de errores. Los más modernos códigos, utilizan esquemas de 2° a 4° orden.

Los métodos modernos de integración son simpléticos, lo que significa que los errores de truncación crecen linealmente con el tiempo, y son, por lo tanto, los métodos preferidos para integraciones de *n*-cuerpos.

Algunos ejemplos de integradores simplécticos son:

- SWIFT (Levinson y Duncan, 1994).
- MERCURY (Chambers, 1999).
- Mikkola (Mikkola, 1997).

Un código como MERCURY puede integrar unos pocos cuerpos para periodos arriba de 1Ga, en cerca de un mes, en un procesador de 36 Hz, y permite integraciones de sistemas planetarios para el tiempo de vida del sistema. Alternativamente estos códigos pueden ser usados para correr numerosas simulaciones cortas, y poder explorar parámetros orbitales de sistemas planetarios conocidos (Barnes y Quinn, 2001, 2004); o modelar alguna etapa de formación planetaria (Chambers, 1999, Raymond, Quinn y Lunine, 2004, Lissauer, 2007). Estos códigos, por lo tanto, nos proveen herramientas para comprender el comportamiento a largo plazo, como es en general la característica de los sistemas planetarios.

A.2 Códigos computacionales utilizados en la tesis.

Los códigos computacionales mostrados a continuación se utilizaron en las integraciones numéricas llevadas a cabo en esta tesis. Todos los códigos fueron desarrollados por Chávez, C. y Georgarakakos, N. (Chávez, C. en comunicación privada 2017).

A.2.1 Programa en Fortran para resolver las ecuaciones del movimiento planetario.

```
c  Kepler1647 grid
  implicit double precision (a-h,o-z)
  integer*4 inp2
  integer cc,counter,inp3,inp1,inp7,e1c,e2c,rtype,coll
  double precision maza1,maza2,maza3,mtot,t,pi,perrat
  double precision inp4,inp8,inp18,inp9,inp10,inp11,inp12,inp13,
&inp14,inp15,inp16,inp17,inp19,inp20,inp21,inp22,inp5,inp6,n2
  double precision xwm(6),vwm(6),pine(5,2),peri
  double precision ttt,ms,mj,mz1,mz2,mz3,me
  pi=dacos(-1.d0)
  cc=0

  pin=11.25882d0/365.d0
```

```

e10=0.1593d0
w10m=300.5442d0
w20m=155.0464d0
f10m=0.d0
w10=w10m*pi/180.d0
w20=w20m*pi/180.d0
f10=f10m*pi/180.d0

ms=1.98911d0*10.d0**6.d0
mj=1898.6d0/ms
me=5.9736d0/ms
mz1=1.2207d0
mz2=0.9678d0
mz3=312.50d0*me

maza2=mz2/(mz1+mz2)
maza1=1.d0-maza2
maza3=mz3/(mz1+mz2)
mtot=maza1+maza2+maza3

c time in years
realt=100000.d0

111 DO 3000 ie20=1,5

    e20=0.d0+0.01d0*(ie20-1)

121 DO 2500 im=1,101

    peri=1.d0-(im-1)*0.008d0

    open(23,file='k413-stab1000.out')
133   read(23,*,END=233) c1,c2,c3,c4,c5
    if (abs(peri-c2) .LT. 0.0001d0 .AND. abs(e20-c3) .LT. 0.0001d0)
    &then
        close(23)
        goto 2500
    endif
    goto 133
233   close(23)

```

```

      reala2=peri/(1.d0-e20)
      reala1=0.10148d0
      perrat=sqrt((reala2/reala1)**3.d0*((mz1+mz2)/(mz1+mz2+mz3)))
      n2=1.d0/perrat
      a2=(perrat**2.d0*mtot)**(1.d0/3.d0)
      r10=(1.d0-e10**2.d0)/(1.d0+e10*dcos(f10))

      DO 1500 ifm=1,8
        coll=0
        rtype=0
        iq21=0
        iq22=0
        iq23=0
        iq24=0
        iqt1=0
        iqt2=0
        iqt3=0
        iqt4=0

        DO 260 ipine=1,5
          pine(ipine,1)=0.d0
          pine(ipine,2)=0.d0
260    continue

        f20m=0.d0+(ifm-1)*45.d0
        f20=f20m*pi/180.d0
        r20=a2*(1.d0-e20**2.d0)/(1.d0+e20*dcos(f20))
        print*,'XXX=',peri,e20,f20m
        e1max=0.d0
        e2max=0.d0
        e1c=0
        e2c=0

        timin=2.d0*pi*realt/pin

      inp1=+1
      inp2=25
      inp3=ttt*inp2/10000.d0

      if (DMOD(ttt*inp2,10000.d0) .EQ. 0.d0) then
        inp3=inp3+7
      endif
      inp3=13333

```

```

inp4=timin
inp5=1
inp6=15
inp7=1
inp8=maza1
inp9=maza2
inp10=maza3

c inner binary
inp11=r10*dcos(f10+w10)
inp12=r10*dsin(f10+w10)
inp13=0.d0
inp14=-(dsin(f10+w10)+e10*dsin(w10))/sqrt(1.d0-e10**2.d0)
inp15=(dcos(f10+w10)+e10*dcos(w10))/sqrt(1.d0-e10**2.d0)
inp16=0.d0
c outer binary
inp17=r20*dcos(f20+w20)
inp18=r20*dsin(f20+w20)
inp19=0.d0
inp20=-n2*a2*(dsin(f20+w20)+e20*dsin(w20))/sqrt(1.d0-e20**2.d0)
inp21=n2*a2*(dcos(f20+w20)+e20*dcos(w20))/sqrt(1.d0-e20**2.d0)
inp22=0.d0

counter=0
open(65,file='input1')
write(65,'(2I5,I7,3D25.15,I5,15D25.15)')inp1,inp2,
&inp3,inp4,inp5,inp6,inp7,inp8,inp9,inp10,
&inp11,inp12,inp13,inp17,inp18,inp19,inp14,inp15,inp16,inp20,
&inp21,inp22
close(65)

CALL SYSTEM ("./mik1")
cc=cc+1
print*,'fora=',cc

ioj1=0
OPEN(40,FILE='stab1.out')
OPEN(50,FILE='ola1.out')
OPEN(60,FILE='oj1')
OPEN(70,FILE='flag1.out')
265 READ(60,'(13D25.15)',end=272)t,xwm,vwm
ioj1=ioj1+1
hx1=xwm(2)*vwm(3)-xwm(3)*vwm(2)

```

```

hy1=xwm(3)*vwm(1)-xwm(1)*vwm(3)
hz1=xwm(1)*vwm(2)-xwm(2)*vwm(1)
hx2=xwm(5)*vwm(6)-xwm(6)*vwm(5)
hy2=xwm(6)*vwm(4)-xwm(4)*vwm(6)
hz2=xwm(4)*vwm(5)-xwm(5)*vwm(4)
h1square=hx1**2.d0+hy1**2.d0+hz1**2.d0
h2square=hx2**2.d0+hy2**2.d0+hz2**2.d0
r=dsqrt(xwm(1)**2.d0+xwm(2)**2.d0+xwm(3)**2.d0)
r1=dsqrt(xwm(4)**2.d0+xwm(5)**2.d0+xwm(6)**2.d0)
v2=vwm(1)**2.d0+vwm(2)**2.d0+vwm(3)**2.d0
v3=vwm(4)**2.d0+vwm(5)**2.d0+vwm(6)**2.d0
ei1=-xwm(1)/r+(vwm(2)*hz1-vwm(3)*hy1)
ei2=-xwm(2)/r+(vwm(3)*hx1-vwm(1)*hz1)
ei3=-xwm(3)/r+(vwm(1)*hy1-vwm(2)*hx1)
eo1=-xwm(4)/r1+(vwm(5)*hz2-vwm(6)*hy2)*(1.d0/mtot)
eo2=-xwm(5)/r1+(vwm(6)*hx2-vwm(4)*hz2)*(1.d0/mtot)
eo3=-xwm(6)/r1+(vwm(4)*hy2-vwm(5)*hx2)*(1.d0/mtot)
e1=dsqrt(ei1**2.d0+ei2**2.d0+ei3**2.d0)
e2=dsqrt(eo1**2.d0+eo2**2.d0+eo3**2.d0)
r13=dsqrt((xwm(4)+maza2*xwm(1))**2.d0+(xwm(5)
&+maza2*xwm(2))**2.d0+(xwm(6)+maza2*xwm(3))**2.d0)
r23=dsqrt((xwm(4)-maza1*xwm(1))**2.d0+(xwm(5)-
&maza1*xwm(2))**2.d0+(xwm(6)-maza1*xwm(3))**2.d0)
ener=0.5d0*(maza1*maza2*v2+(maza3/mtot)*v3)-
&(maza1*maza2/r+maza1*maza3/r13+maza2*maza3/r23)
angul1=maza1*maza2*hx1+(maza3/mtot)*hx2
angul2=maza1*maza2*hy1+(maza3/mtot)*hy2
angul3=maza1*maza2*hz1+(maza3/mtot)*hz2
angul=dsqrt(angul1**2.d0+angul2**2.d0+angul3**2.d0)
eneri=0.5d0*maza1*maza2*v2-maza1*maza2/r
enero=0.5d0*v3*maza3/mtot-maza3/r1

      if (ec2 .GT. 1.d0) then
        semi2=h2square/(mtot*(e2**2.d0-1.d0))
c      semi22=maza3/(2.d0*enero)
      else
        semi2=h2square/(mtot*(1.d0-e2**2.d0))
c      semi22=-maza3/(2.d0*enero)
      endif

      if(r13*reala1 .LT. 0.001d0 .OR. r23*reala1 .LT. 0.001d0) then
        coll=coll+1

```



```

endif

if(r/r1 .GE. 1.d0) then
  rtype=rtype+1
endif
if (ioj1 .EQ. 1) then
  ener00=ener
endif
  if(e1 .GT. 1.d0) then
    e1c=e1c+1
  endif
if(e2 .GT. 1.d0) then
  e2c=e2c+1
endif

if (t .GT. 0.25d0*timin .AND. iqt1 .EQ. 0)then
  pine(1,2)=e2
  iqt1=1
endif

if (t .GT. 0.55d0*timin .AND. iqt2 .EQ. 0)then
  pine(2,2)=e2
  iqt2=1
endif

if (t .GT. 0.75d0*timin .AND. iqt3 .EQ. 0)then
  pine(3,2)=e2
  iqt3=1
endif

if (t .GT. 0.88d0*timin .AND. iqt4 .EQ. 0)then
  pine(4,2)=e2
  iqt4=1
endif

c  write(13,*) t*pin/(2.d0*pi),e2
c  write(14,*) t*pin/(2.d0*pi),semi2*reala1,r1
c  write(15,*) t*pin/(2.d0*pi),eneri+enero

c  FIND MAX ECCENTRICITY

if (ioj1 .EQ. 1) then

```

```

    e1max=e1
    e2max=e2
endif
if (ioj1 .GT. 1 .AND. e1 .GT. e1max) then
    e1max=e1
endif
if (ioj1 .GT. 1 .AND. e2 .GT. e2max) then
    e2max=e2
endif
c 270 continue
271 goto 265
272 continue

    close(60)

    pine(5,2)=e2
C    FIND STRAIGHT LINES ECC2 AND POSSIBLE STABLE e2=1

```

```

    if (pine(2,2) .GT. 0.9d0 .AND.
& ABS(pine(2,2)-pine(1,2)) .LT. 0.001d0) then
        iq21=1
    endif
    if (pine(3,2) .GT. 0.9d0 .AND.
& ABS(pine(3,2)-pine(2,2)) .LT. 0.001d0) then
        iq22=1
    endif
    if (pine(4,2) .GT. 0.9d0 .AND.
& ABS(pine(4,2)-pine(3,2)) .LT. 0.001d0) then
        iq23=1
    endif
    if (pine(5,2) .GT. 0.9d0 .AND.
& ABS(pine(5,2)-pine(4,2)) .LT. 0.001d0) then
        iq24=1
    endif

    write(50,*) peri,e20,f20m,e1max,e2max,
&e1c,e2c,iq21,iq22,iq23,iq24,(ener00-ener)/ener00
&,rtype,coll

    if (e2max .GE. 1.d0) then
        write(40,*) reala2,peri,e20,f20m,e2max
c        print*,'UNSTABLE'
        goto 2500

```

```

endif

if (iq21 .EQ. 1 .OR. iq22 .EQ. 1 .OR. iq23 .EQ. 1
&.OR. iq24 .EQ. 1) then

    if (e2max .LT. 1.d0 .AND. e2max .GT. 0.95d0) then
        write(70,*) reala2,peri,e20,f20m,e1max,e2max
        &,e1c,e2c,iq21,iq22,iq23,iq24,rtype,coll
        write(40,*) reala2,peri,e20,f20m,e2max
c        print*, 'UNSTABLE'
        goto 2500
    endif

endif

c1400 CLOSE(60)

1500 continue

2500 continue

3000 continue

    CLOSE(40)
    CLOSE(50)
    CLOSE(70)

5000 STOP
END

```

A.2.2 Subrutina en Fortran para el integrador simpléctico Mikkola.

```

c  Program giii.f mediorthoseis double prec
IMPLICIT REAL*8 (A-H,M,O-Z)
INTEGER i5
PARAMETER(NMX=3,NMX3=3*NMX)
parameter(PI=3.141592653589793D0,
&GaussK=0.01720209895D0,twopi=pi+pi)
real*8 xw(6),vw(6)
real*8 M(NMX),X(NMX3),V(NMX3)
real*8 XJ(NMX3),VJ(NMX3)
Common /AAA/A1,A2,Ene0,ax1,prd1
common/Diagno/Energy,iwr
common/paskel/hs

```

```

c  call cccc
c  Read data from file 'input'
  open(65,file='input1')
  open(67,file='output1')
c  read writing index, average # of steps/binary period, # of steps between outputs,
c  method coefficients a1, a2 (good ones=?), corection index (=1, recommended)
  a1=1 !
  a2=15 !
  icor=1
  i5=0
  aves=0.

c  UNITS: GM=1
c  READING OF DATA
c  READ(65,*)lwr,NS,Nsteps,tmax,a1,
c  &a2,icor,M(1),M(2),M(3),x(1),x(2)
c  &,x(3),x(4),x(5),x(6),v(1),v(2),v(3),v(4),v(5),v(6)
  READ(65,'(2I5,I8,3D25.15,I5,15D25.15)')lwr,NS,Nsteps,tmax,a1,
  &a2,icor,M(1),M(2),M(3),x(1),x(2)
  &,x(3),x(4),x(5),x(6),v(1),v(2),v(3),v(4),v(5),v(6)

  time=0.0
c  read masses
c  read(65,*) (M(i),i=1,3)
c  read Jacobian coordinates and velocities: first vector from
c  m1 to m2 then vector from cm of m1 & m2 to m3.
c  read(65,*)(x(i),i=1,6)
c  read(65,*)(v(i),i=1,6)
  close(65)
c  DATA READ
c
c  open output files
  open(60,file='oj1')
c  write(60,*)m
  open(61,file='xy')
  open(66,file='jc')
  do k=1,6
    xj(k)=x(k)
    vj(k)=v(k)
  end do

  do k=1,6
    xw(k)=xj(k)
    vw(k)=vj(k)

```

```

end do
call EnergyTest(xw,vw,m,Ene0,g,A1,A2,NS,Hs)
ene00=ene0
prd0=prd1
c  find the parametric 'symplectic space coordinates'
c  by application of Wisdom-Holman-Touma corrector
c  backwards. (iteration )
do ite=1,10
do k=1,6
if(ite.eq.10)write(6,*)ite,k,xw(k)-x(k),vw(k)-v(k)
xw(k)=xj(k)
vw(k)=vj(k)
end do
if(icor.ge.0)call cor(hs,xw,vw,m)
do k=1,6
xj(k)=xj(k)+x(k)-xw(k)
vj(k)=vj(k)+v(k)-vw(k)
end do
end do
do k=1,6
xw(k)=xj(k)
vw(k)=vj(k)
end do
call cor(hs,xw,vw,m)
call EnergyTest(xw,vw,m,Ene1,g,dum,dum,NS,dum)
call EnergyTest(xj,vj,m,Ene0,g,dum,dum,ns,dum)
prd0=prd1
c  write(6,*)' e0-e1,e00-e1',ene0-ene1,ene00-ene1
c  write(6,*)ene00
c  write(6,*)ene0
c  write(6,*)ene1
ene0=ene1
c  Here begins the integration
111 continue
c  first half-step
call SI3(Hs/2,Xj,Vj,M,Time,0)
c  max # of steps set to 1000,000 here. Modify as you like.
do is=0,1000 000
told=time
call SI3(Hs,Xj,Vj,M,Time,1) ! fullsteps
if(time.gt.tmax)goto 99
c  output at every nsteps:th step.
if(is.eq.is/nsteps*nsteps)then
step=time-told

```

```

do k=1,6
  xw(k)=xj(k)
  vw(k)=vj(k)
end do
Tw=time
call SI3(hs/2,xw,vw,M,Tw,1) ! halfstep for output
if(icor.ge.0)call Cor(hs,xw,vw,m)
c  NOTE: Here the corrected Jacobian coordinates (xw , vw) are available for analysis!!!!
call Energytest(xw,vw,m,Energy,g,dum,dum,NS,dum) ! diagno only
ytime=time/prd0
c  write(6,777)tw,(energy-ene1)/ene0,g*(energy-ene1),ax1,prd1
777  format(1x,f12.2,1p,3e12.3,0p,3f10.4)
      nwr=nwr+1
c  two alternatives: cm of the system or cm of the binary. Comment
c  one away.
c  call JtoCM(xw,vw,M,X,V)
c-----
c  this is just diagnostics; may be removed.  !
c  WRITE(66,123)TIME,nwr,step,          !
c  &(xj(i),xj(i+1),i=1,6,3)          !
c-----

c  save the Jacobian coordinates for separate analysis.
if(iwr.ge.0) write(60,'(13D25.15)' )time,xw,vw
c  if(iwr.ge.0) write(60,*)time
c  write(60,*) (xw(i),i=1,3)
c  write(60,*) (vw(i),i=1,3)
c  write(60,*) (xw(i),i=4,6)
c  write(60,*) (vw(i),i=4,6)
i5=i5+1

c----- !
c  just to plot the orbit (in xy projection); may be removed.!
call JtoCMoB(xw,vw,M,X,V)
c  write(61,124)time,(x(i),x(i+1),i=1,9,3)          !
c-----

123  format(1x,f12.4,i10,9f10.3,9f10.3)
124  format(1x,f12.4,6f10.3)
      end if
      end do! is
99  call SI3(Hs/2,Xj,Vj,M,Time,1) ! ???????
      IF(Time.LT.TMAX)GOTO 111
      write(67,*)i5

```

```

write(6,*) 'points=',i5
close(67)
STOP
END

```

```

SUBROUTINE SI3(h,x,v,m,time,lfi)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,M,O-Z)
real*8 x(4),v(4),m(3),ga(0:5),gb(0:5),GN(5),dv1(3),dv2(3)
real*8 xa(3),xb(3),dg1(3),dg2(3),dr1(3),dr2(3),dp1(3),dp2(3)
real*8 oy2(5)
common/AAA/A1,A2,ener0,ax1,prd1
common/diagno/Energy,iwr
common/paskel/hs
common/mass/mp1,mp2,my1,my2,af0,af1,af2,ak1,ak2
SAVE
data td,y1,y2,rest/4*0.0/,dv1,dv2/6*0.0/
c Auxiliary quantities
twopi=8.d0*atan(1.d0)
AR=a2/a1
mj1=m(1)+m(2)
mj2=mj1+m(3)
c mp1=m(1)*m(2)
c mp2=mj1*m(3)
c my1=mp1/mj1
c my2=mp2/mj2
c af0=(m(1)+m(2))*m(3)
c af1=-m(1)*m(3)
c af2=-m(2)*m(3)
c ak1=m(2)/(m(1)+m(2))
c ak2=ak1-1.
r10=sqrt(cdot(x,x))
r20=sqrt(cdot(x(4),x(4)))
c Perturbations
c-----V
do k=1,3
xa(k)=x(3+k)+ak1*x(k)
xb(k)=x(3+k)+ak2*x(k)
end do
ra=sqrt(cdot(xa,xa))
rb=sqrt(cdot(xb,xb))
Rest=af0/r20+af1/ra+af2/rb
g=1./(A1/r10+A2/r20)
c*****

```

```

yr13=1/r10**3
yr23=1/r20**3
yra3=1/ra**3
yrb3=1/rb**3
if(ifi.gt.0)then
do k=1,3
dg1(k)=yr13*g**2*A1*x(k)
dg2(k)=yr23*g**2*A2*x(k+3)
dr1(k)=-(af1*ak1*yra3*xa(k)+af2*ak2*yrb3*xb(k))
dr2(k)=-(af1*yra3*xa(k)+af2*yrb3*xb(k)+af0*x(3+k)*yr23)
dp1(k)=-dg1(k)*Rest-g*dr1(k)
dp2(k)=-dg2(k)*Rest-g*dr2(k)
dv1(k)=hs*dp1(k)/my1
dv2(k)=hs*dp2(k)/my2
v(k )=v(k )+dv1(k)
v(3+k)=v(3+k)+dv2(k)
end do
c-----A
end if

c Two-body motions
W12=CDOT(v(1),v(1))
w22=cdot(v(4),v(4))
beta1=2.D0*mj1/R10-W12
beta2=2.d0*mj2/r20-w22
Ener2=(-.5d0*my1*beta1-.5d0*my2*beta2)
c ENERGY EVALUATION
Energy=Ener2+Rest
c*****
eps=g*(Ener2-Ener0)
eps1=eps*A1/mp1
eps2=eps*A2/mp2
c Modified masses
mj1=mj1*(1+eps1)
mj2=mj2*(1+eps2)
c Modified two-body motions
beta1=2*mj1/r10-w12
beta2=2*mj2/r20-w22
ETA1=CDOT(X(1),v(1))
eta2=cdot(x(4),v(4))
ZETA1=mj1-beta1*R10
zeta2=mj2-beta2*r20

if(h.eq.hs)then

```



```

kie=kie+1
do i=5,2,-1
oy2(i)=oy2(i-1)
end do
oy2(1)=y2van
if(kie.gt.5)then
y2=4*oy2(1)-6*oy2(2)+4*oy2(3)-oy2(4)
y2van=y2
end if
end if

```

```

vi1=0.0
vi2=h/A2
p1=-1
p2= 1
if(h.ne.hs)y2=.5*y2
if(y2.lt.0.0.or.y2.gt.vi2)y2=.5*(vi2)

```

```

do 10 ite=1,100
y1=(h-A2*y2)/A1
z1=beta1*y1*y1
z2=beta2*y2*y2
call gfun(beta1,y1,ga)
call gfun(beta2,y2,gb)
R1=R10+eta1*ga(1)+zeta1*ga(2)
R2=R20+eta2*gb(1)+zeta2*gb(2)
t1=r10*y1+eta1*ga(2)+zeta1*ga(3)
t2=r20*y2+eta2*gb(2)+zeta2*gb(3)
ft=t2-t1
f1=R2+AR*R1
if(ft.lt.0.0)then
ak=vi2
Pk=p2
vi1=y2
p1=ft
else
ak=vi1
Pk=p1
vi2=y2
p2=ft
end if

```

```

et1=eta1*ga(0)+zeta1*ga(1)
et2=eta2*gb(0)+zeta2*gb(1)

```

```

ze1=zeta1*ga(0)-beta1*eta1*ga(1)
ze2=zeta2*gb(0)-beta2*eta2*gb(1)
f2=et1-(ar)**2*et2
f3=ze1+(ar)**3*ze2
dy2=-ft/f1
dy2=-ft/(f1+dy2*f2/2)
dy2=-ft/(f1+dy2*(f2/2+f3*dy2/6))
dy1=-AR*dy2
test=a1*abs(dy1)+a2*abs(dy2)
if(test.lt.1.e-8*h)goto 11
y2=y2+dy2
if( (y2-vi1).lt.0.0)y2=.5d0*(vi1+vi2)
if( (vi2-y2).lt.0.0)y2=.5d0*(vi1+vi2)
if(ite.eq.ite/7*7)y2=.5d0*(vi1+vi2)
y1=(h-A2*y2)/A1
1231 format(1x,2i10,1p,9e12.4)
10  continue
    write(6,*)' no convergence'
    STOP
11  continue
    if(h.eq.hs)then
c    if(iwr.gt.0)write(92,1231)kie,ite,y1,y2,(y2-y2van)/y2
        y2van=y2
    end if
c    Diagnostics
    if(iwr.gt.0)then
        ecc1=sqrt((zeta1/mj1)**2+beta1/mj1*eta1**2/mj1)*(1+eps1)
        ecc2=sqrt((zeta2/mj2)**2+beta2/mj1*eta2**2/mj2)*(1+eps2)
c    write(500,*)time,ecc1,(aves+ecc1**2)/(i5+1)
c    write(500,*)time,ecc1,ecc2
c    aves=aves+ecc1**2
c    i5=i5+1
c    write(67,987)time,ite,ft/td,ecc1,ecc2
c    987 format(1x,f12.2,i4,1p,5e12.4,0p,2f10.3)
876 format(1x,6g12.3)
877 format(1x,'ep,mj,b,R',6g12.4)
    end if

ga(5)=ga(5)+ga(4)*dy1+ga(3)*dy1**2/2
ga(4)=ga(4)+ga(3)*dy1+ga(2)*dy1**2/2
gb(5)=gb(5)+gb(4)*dy2+gb(3)*dy2**2/2
gb(4)=gb(4)+gb(3)*dy2+gb(2)*dy2**2/2
y1=y1+dy1
y2=y2+dy2

```

```

ga(3)=y1**3/6-beta1*ga(5)
gb(3)=y2**3/6-beta2*gb(5)
ga(2)=y1**2/2-beta1*ga(4)
gb(2)=y2**2/2-beta2*gb(4)
ga(1)=y1-beta1*ga(3)
gb(1)=y2-beta2*gb(3)
r1=r10+eta1*ga(1)+zeta1*ga(2)
r2=r20+eta2*gb(1)+zeta2*gb(2)
td=r20*y2+eta2*gb(2)+zeta2*gb(3)
time=time+td
do 22 k=1,2
if(k.eq.1)then
do i=1,5
gn(i)=ga(i)
end do
r0=r10
rx=r1
m12=mj1
else
do i=1,5
gn(i)=gb(i)
end do
r0=r20
rx=r2
m12=mj2
end if

F=1.D0-m12*GN(2)/R0
G=(td-m12*GN(3))
dF=-m12*GN(1)/(R0*RX)
dG=1.D0-m12*GN(2)/RX
i1=1+(k-1)*3
i3=i1+2
DO 1 l=i1,i3
W0l=v(l)
v(l)=dF*X(l)+dG*v(l)
X(l)= F*X(l)+ G*W0l
1  CONTINUE
22  continue
RETURN
END
FUNCTION CDOT(A,B)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 A(3),B(3),CDOT

```

```

CDOT=A(1)*B(1)+A(2)*B(2)+A(3)*B(3)
RETURN
END

```

C

```

subroutine gfun(beta,y,g)
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 g(0:5),c(5)
z=beta*y*y
call cfun(z,c)
g(0)=1-z*c(2)
s=y
do i=1,5
  g(i)=s*c(i)
  s=s*y
end do
return
end
SUBROUTINE CFUN(Z,C)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
PARAMETER(C6=1.D0/6.D0,C132=1.D0/132.D0,C56=1.D0/56.D0,
&C30=1.D0/30.D0,C24=1.D0/24.D0,C156=1.D0/156.D0,
&C90=1.D0/90.D0,C110=1.D0/110.D0,C16=1.D0/16.D0,C8=1.D0/8.D0,
&C72=1.D0/72.D0,C42=1.D0/42.D0,C120=1.D0/120.D0,U=1.d0)
DIMENSION C(5)
data large/0/
h=z
DO 1 k=0,10
  IF(ABS(H).lt. 0.1)goto 2
  h=0.25d0*h
1  CONTINUE
  if(large.ge.10) then
    i5=-99
c    write(6677,*)i5
    STOP
  endif
  if(large.lt.10)then
    large=large+1
    write(6,*)' too large Z in CFUN!',z,char(7)
  end if
2  CONTINUE
  C(4)=(U-H*(U-H*(U-H*C90/(U+H*C132))*C56)*C30)*C24
  C(5)=(U-H*(U-H*(U-H*C110/(U+H*C156))*C72)*C42)*C120
  DO 4 I=1,K

```

```

C3=c6-h*C(5)
C2=.5D0-h*C(4)
C(5)=(C(5)+C(4)+C2*C3)*c16
C(4)=C3*(2.d0-h*C3)*c8
4  h=4.d0*h
   C(3)=c6-Z*C(5)
   C(2)=.5D0-Z*C(4)
   C(1)=1.d0-Z*C(3)
   RETURN
   END
   SUBROUTINE EnergyTest(x,v,m,Energy,g,an1,an2,NS,Hs)
   IMPLICIT REAL*8 (A-H,M,O-Z)
   real*8 x(4),v(4),m(3)
   real*8 xa(3),xb(3)
   common/AAA/A1,A2,dummy,ax1,prd1
   common/mass/mp1,mp2,my1,my2,af0,af1,af2,ak1,ak2
   data i0/0/
   save
   twopi=8.d0*atan(1.d0)
c  Auxiliary quantities
   mj1=m(1)+m(2)
   mj2=mj1+m(3)
   mp1=m(1)*m(2)
   mp2=mj1*m(3)
   my1=mp1/mj1
   my2=mp2/mj2
   af0=(m(1)+m(2))*m(3)
   af1=-m(1)*m(3)
   af2=-m(2)*m(3)
   ak1=m(2)/(m(1)+m(2))
   ak2=ak1-1.
   r10=sqrt(cdot(x,x))
   r20=sqrt(cdot(x(4),x(4)))
c  Perturbations
c-----V
   do k=1,3
   xa(k)=x(3+k)+ak1*x(k)
   xb(k)=x(3+k)+ak2*x(k)
   end do
   ra=sqrt(cdot(xa,xa))
   rb=sqrt(cdot(xb,xb))
   Rest=af0/r20+af1/ra+af2/rb
   W12=CDOT(v(1),v(1))
   w22=cdot(v(4),v(4))

```

```

beta1=2.D0*mj1/R10-W12
beta2=2.d0*mj2/r20-w22
alf1=beta1/mj1
alf2=beta2/mj2
ax1=1/alf1
Prd1=twopi*ax1*sqrt(ax1/mj1)
hs=Prd1/NS
Ener2=(-.5d0*my1*beta1-.5d0*my2*beta2)
c  ENERGY EVALUATION
Energy=Ener2+Rest
if(i0.eq.0)then
ga=1/(A1*alf1+A2*alf2)
an1=A1*ga
an2=A2*ga
i0=1
end if
g=1/(a1/r10+a2/r20)
RETURN
END
SUBROUTINE Cor(H,xj,vj,m)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,M,O-Z)
real*8 x(6),m(3),dv1(3,3),dv2(3,3),xj(6),vj(6),gam(3)
real*8 xa(3),xb(3),dg1(3),dg2(3),dr1(3),dr2(3),dp1(3),dp2(3)
common/AAA/A1,A2,ener0,ax1,prd1
common/diagno/Energy,iwr
common/mass/mp1,mp2,my1,my2,af0,af1,af2,ak1,ak2
save
c  Auxiliary quantities
mj1=m(1)+m(2)
mj2=mj1+m(3)
c  mp1=m(1)*m(2)
c  mp2=mj1*m(3)
c  my1=mp1/mj1
c  my2=mp2/mj2
c  af0=(m(1)+m(2))*m(3)
c  af1=-m(1)*m(3)
c  af2=-m(2)*m(3)
c  ak1=m(2)/(m(1)+m(2))
c  ak2=ak1-1.

r10=sqrt(cdot(xj(1),xj(1)))
r20=sqrt(cdot(xj(4),xj(4)))
g0=1/(A1/r10+A2/r20)
ceps=.1*g0

```

```

s=ceps*h
twos=s+s
Do kh=1,3
s=-s
if(kh.eq.3)s=0.
do j=1,6
x(j)=xj(j)+s*vj(j)
end do

r10=sqrt(cdot(x,x))
r20=sqrt(cdot(x(4),x(4)))
do k=1,3
xa(k)=x(3+k)+ak1*x(k)
xb(k)=x(3+k)+ak2*x(k)
end do
ra=sqrt(cdot(xa,xa))
rb=sqrt(cdot(xb,xb))
Rest=af0/r20+af1/ra+af2/rb
g=1./(A1/r10+A2/r20)
gam(kh)=g*Rest
yr13=1/r10**3
yr23=1/r20**3
yra3=1/ra**3
yrb3=1/rb**3
do k=1,3
dg1(k)=yr13*g**2*A1*x(k)
dg2(k)=yr23*g**2*A2*x(k+3)
dr1(k)=-(af1*ak1*yra3*xa(k)+af2*ak2*yrb3*xb(k))
dr2(k)=-(af1*yra3*xa(k)+af2*yrb3*xb(k)+af0*x(3+k)*yr23)
dp1(k)=-dg1(k)*Rest-g*dr1(k)
dp2(k)=-dg2(k)*Rest-g*dr2(k)
dv1(k,kh)=dp1(k)/my1
dv2(k,kh)=dp2(k)/my2
end do
end do
hc=-h**2/24
rdot=(gam(2)-gam(1))/(twos)

do k=1,3
xj(k )=xj(k )+g0*hc*dv1(k,3)
vj(k )=vj(k )-g0*hc*(dv1(k,2)-dv1(k,1))/(twos)
&+ dg1(k)*rdot*hc /my1
xj(k+3)=xj(k+3)+g0*hc*dv2(k,3)
vj(k+3)=vj(k+3)-g0*hc*(dv2(k,2)-dv2(k,1))/(twos)

```

```

&+ dg2(k)*rdot*hc /my2
end do
RETURN
END
SUBROUTINE JtoCM(XJ,VJ,M,X,V)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,M,O-Z)
REAL*8 X(9),M(3),XJ(6),cm(3),cv(3),v(9),vj(6)

```

C

```

x(1)=0
x(2)=0
x(3)=0
x(4)=xj(1)
x(5)=xj(2)
x(6)=xj(3)
p=m(2)/(m(1)+m(2))
x(7)=xj(1)*p+xj(4)
x(8)=xj(2)*p+xj(5)
x(9)=xj(3)*p+xj(6)

```

```

do k=1,3
cm(k)=x(k)
cv(k)=v(k)
end do

```

```

sm=m(1)
do i=2,3
sm=sm+m(i)
do k=1,3
cm(k)=cm(k)+m(i)*x(3*i-3+k)
cv(k)=cv(k)+m(i)*v(3*i-3+k)
end do ! k
end do ! i

```

c cm ok

```

do i=1,3
do k=1,3
x(3*i-3+k)=x(3*i-3+k)-cm(k)/sm
v(3*i-3+k)=v(3*i-3+k)-cv(k)/sm
end do ! k
end do ! i
return
end

```



```

SUBROUTINE JtoCMoB(XJ,VJ,M,X,V)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,M,O-Z)
REAL*8 X(9),M(3),XJ(6),v(9),vj(6)
C
p=m(2)/(m(1)+m(2))
x(7)=+xj(4)
x(8)=+xj(5)
x(9)=+xj(6)
x(1)=p*xj(1)
x(2)=p*xj(2)
x(3)=p*xj(3)
x(4)=(1-p)*xj(1)
x(5)=(1-p)*xj(2)
x(6)=(1-p)*xj(3)
return
end
subroutine cccc
c  write(6,*) char(7)
write(6,*)' !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!'
write(6,*)' If you use this code for producing paper(s),'
write(6,*)' please refer to: Mikkola.S. (1967) '
write(6,*)' `Practical Symplectic Methods with'
write(6,*)' Time Transformation for the Few-Body Problem",'
write(6,*)' Cel.Mech.and Dyn.Ast 67, 145--165.'
c  write(6,*)char(7)
return
end

```

A.3 El satélite Kepler de la NASA.

Tal como lo dice la NASA, *"La misión Kepler fue la primera en el mundo con la capacidad de detectar realmente planetas análogos a la Tierra orbitando estrellas similares a nuestro Sol en una zona habitable"*. El objetivo científico de Kepler es explorar la estructura y diversidad de los sistemas planetarios (Kocha, Boruckia, Dunhamb, et al., 2004) Esta nave espacial observa una gran muestra de estrellas para lograr varios objetivos clave:

- Determinar cuántos planetas tipo Tierra y más grandes hay en o cerca de la zona habitable (Muir. H, 2007), de una amplia variedad de tipos espectrales de estrellas.
- Determinar el rango de tamaño y forma de las órbitas de estos planetas.

- Estimar cuántos planetas hay en sistemas de múltiples estrellas.
- Determinar el rango de tamaño de órbita, brillo, tamaño, masa y densidad de los planetas gigantes de período corto.
- Identificar miembros adicionales de cada sistema planetario ya descubierto usando otras técnicas, por ejemplo, VTT.
- Determinar las propiedades de las estrellas que albergan sistemas planetarios.

La mayoría de los exoplanetas previamente detectados por otras técnicas, eran planetas gigantes, sobre todo el tamaño de Júpiter y más grandes. Kepler fue diseñado para buscar planetas de 30 a 600 veces menos masivos, más cercanos al orden de la masa terrestre (Júpiter es 318 veces más masivo que la Tierra). El método utilizado es el de tránsito planetario, que consiste en observar el tránsito repetido de los planetas frente a sus estrellas, lo que provoca una ligera reducción en el flujo de radiación de la estrella, del orden de 0.01% para un planeta de tamaño Tierra. La Figura A.3, nos ilustra como un tránsito planetario, produce una disminución en el flujo de luz proveniente de la estrella, específicamente se muestra la curva de luz para el exoplaneta HAT-P-7. Nótese la notoria mejoría en la nitidez de la curva de luz, generada por Kepler, comparada con los efectos de la atmosfera terrestre.



Figura A.3 Curva de luz del planeta extrasolar HAT-P-7. Wikipedia 2017.

Para lograr los objetivos, la misión Kepler utilizó un fotómetro sensible tipo Schmidt de 0.95 m de apertura y un espejo primario de 1.4 metros de diámetro. Su cámara CCD ofrecía una resolución de 95 millones de píxeles; la más potente lanzada al espacio hasta la fecha. Las Figuras A.4 y A5, nos muestran la estructura interior y exterior de Kepler. Mediante este satélite se esperaba ampliar notablemente el número de planetas extrasolares descubiertos, de tal manera que, al término de la misión, se pueda disponer de una estimación más fiable sobre el número de planetas existentes en la galaxia, lo cual se cumplió con gran éxito.

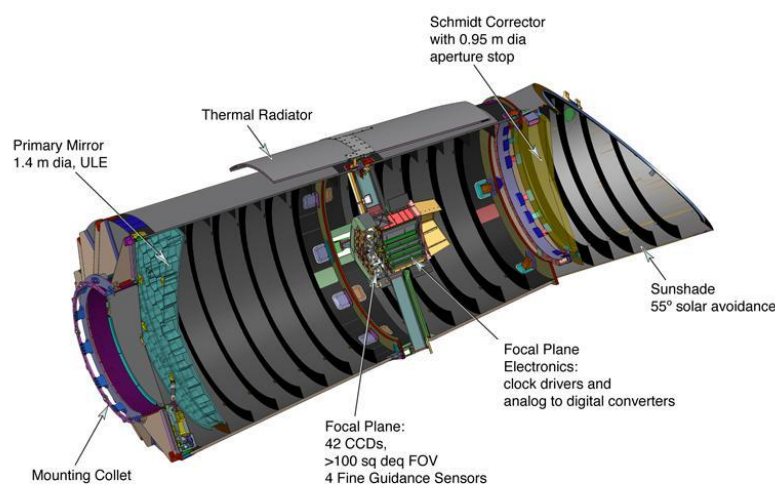


Figura A.4 Estructura interior del satélite Kepler. Crédito de la imagen: Koch, D.

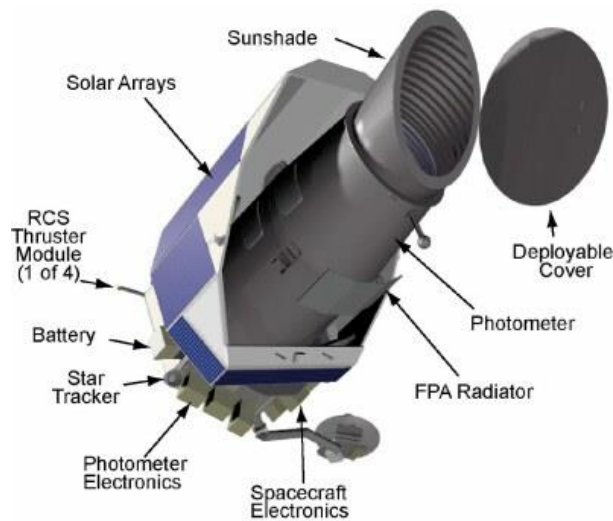


Figura A.5 Estructura exterior del satélite Kepler. Imagen tomada de <http://www.kepler.arc.nasa.gov/downloading.html>. Wikipedia 2017.

La ubicación de Kepler era en una órbita situada a 185 km de la Tierra, lo que le permitía mantener un periodo orbital de 371 días (Figura A.6). La misión tuvo una duración aproximada de 3 años (2009 – 2013), y en ese lapso de tiempo observó cada 30 minutos alrededor de 150 000 estrellas de forma simultánea. El campo de visión de Kepler, fue una zona de la Vía Láctea, en las constelaciones de Cisne y Lira, como lo ilustra la figura A.7.

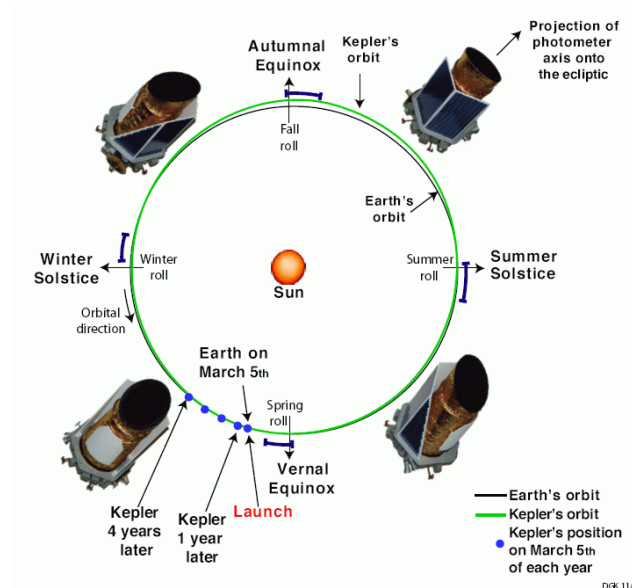


Figura A.6 Órbita del satélite Kepler. Imagen tomada de http://lasp.colorado.edu/kepler-launch/docs/314125main_Kepler_presskit_2-19_smfile.pdf. Wikipedia. 2017.

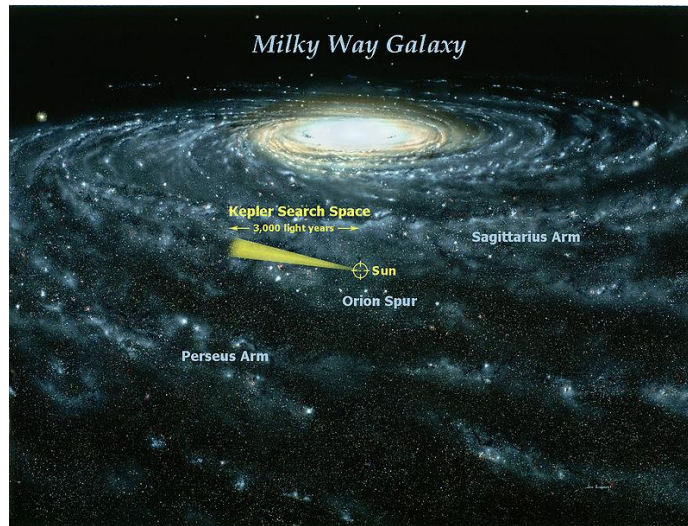


Figura A.7 El campo de visión del satélite Kepler. Imagen tomada de <http://kepler.nasa.gov/images/LomborgA1600-full.jpeg>. Wikipedia. 2017.

Kepler, dejó de funcionar el 15 de agosto de 2013, ese día la NASA, dio por finalizada la misión, dejando un gran legado de planetas descubiertos y muchos otros más que aun se están confirmando por el método de velocidad radial. Para muestra, la figura A.8, nos ilustra un histograma con los descubrimientos de exoplanetas, donde se aprecia claramente la aportación de Kepler a esta importante parte de la astrofísica.

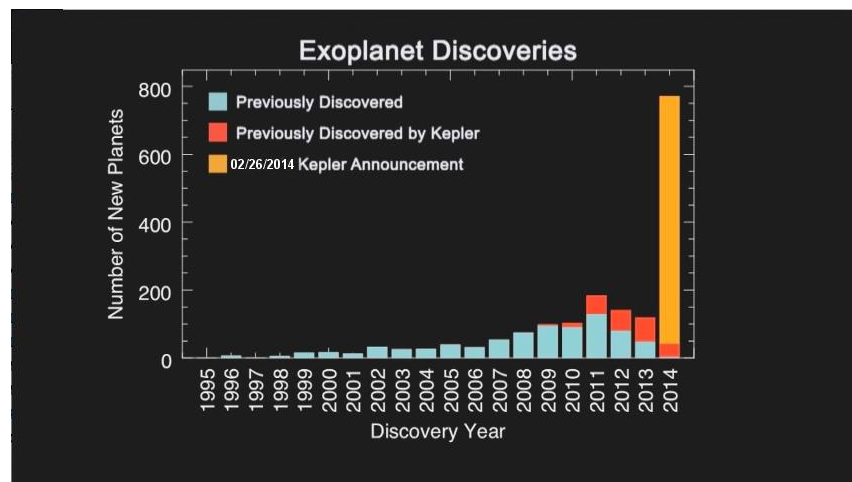


Figura A.8 Histograma con descubrimientos de exoplanetas 1995 - 2014. Imagen tomada de <http://www.nasa.gov/sites/default/files/exoplanetdiscoverieshistogram.jpg>. Wikipedia. 2017.

A.4 El satélite TESS de la NASA.

El Satélite de Sondeo de Exoplanetas en Tránsito, (en inglés Transiting Exoplanet Survey Satellite-TESS) es un telescopio espacial (Figura A.9) que forma parte del Programa Explorers de la NASA y está diseñado para buscar exoplanetas utilizando el método de tránsito en un área 400 veces mayor que la abarcada por la misión Kepler. Su lanzamiento se realizó con éxito el 18 de abril de 2018. Se espera encontrar más de 20 000 exoplanetas, en comparación con aproximadamente los 3800 exoplanetas descubiertos hasta el momento de su lanzamiento.

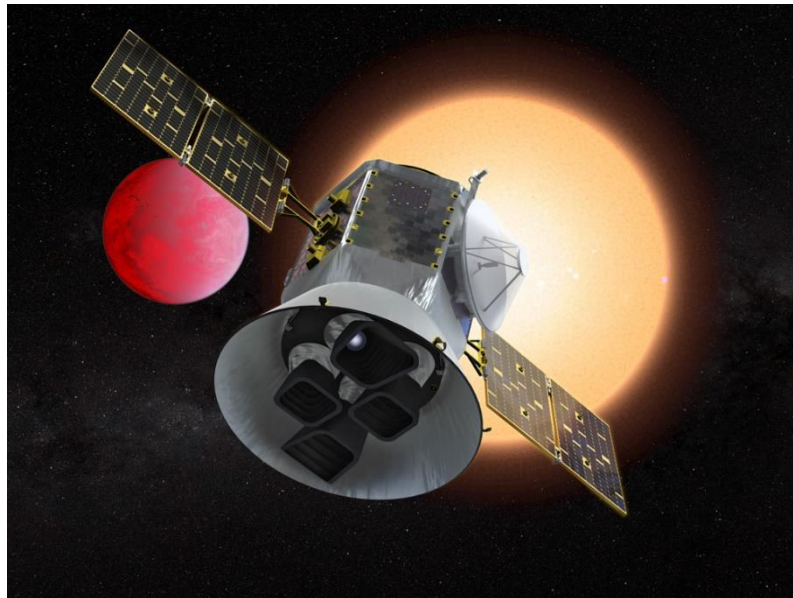


Figura A.9. Representación artística del satélite TESS. Imagen tomada de NASA.
<https://heasarc.gsfc.nasa.gov/docs/tess/objectives.html>

El objetivo principal de la misión es escanear una amplia zona del espacio en la que controlará más de 200 000 estrellas más brillantes y cercanas a la Tierra donde buscará exoplanetas en tránsito durante un periodo de dos años. Para ello, el telescopio lleva a bordo varios tipos de cámaras con los que inspeccionará gran parte del espacio. Con la tecnología de TESS, será posible estudiar la masa, el tamaño, la densidad y la órbita de un gran grupo de pequeños planetas, incluyendo mundos rocosos en las zonas habitables de sus estrellas anfitrionas, también proporcionará objetivos principales para una mejor observación y estudio desde el telescopio espacial James Webb (James Webb Space

Telescope - JWST), así como otros grandes telescopios terrestres y espaciales previstos para el futuro.

Desde una órbita terrestre alta y elíptica con un apogeo cercano a la Luna y un perigeo de 108 000 km, por encima de los satélites geosincrónicos. Orbitará la Tierra dos veces en el tiempo en que la Luna lo hace una vez, una resonancia de 2:1 con la Luna (figura A.10), por lo que la órbita debería permanecer estable durante al menos diez años. El estudio de todo el cielo durante dos años previsto para el TESS se enfocará en estrellas cercanas tipo G, K y M con magnitudes aparentes brillantes superiores a la magnitud 12 (McGiffin, A., Mathews, M., Cooley, S., 2001). Se tiene previsto estudiar aproximadamente 500 000 estrellas, entre las que se incluyen las 1000 enanas rojas más cercanas en el espacio, un área que abarca 400 veces más que la cubierta por la misión Kepler. Se espera que TESS descubra más de 20 000 exoplanetas en tránsito, incluyendo entre 500 y 1000 planetas del tamaño de la Tierra y Supertierras. De esos descubrimientos, se estima que la mayoría de los exoplanetas se encuentren a una distancia de entre 30 y 300 años luz.

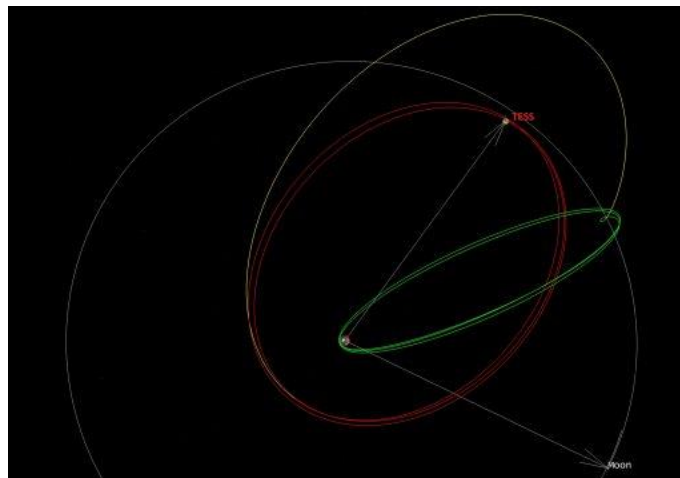


Figura A.10. Órbita del satélite TESS. Imagen tomada de NASA. NASA TESS Mission.

El objetivo es dividir el espacio en 26 sectores de observación, cada sector comprende $24^\circ \times 96^\circ$, con una superposición entre sectores en los polos eclípticos para permitir una sensibilidad adicional hacia los exoplanetas más pequeños y de período más largo en esa región de la esfera celeste. La nave espacial realizará dos órbitas de 13.7 días observando

cada sector, mapeando el hemisferio sur del cielo en su primer año de operación y el hemisferio norte en su segundo año. Las cámaras tomarán imágenes cada 2 segundos, aunque todas las imágenes en bruto representarían mucho más volumen de datos de los que se pueden almacenar o vincular: así, los recortes de alrededor de 15 000 estrellas seleccionadas (por órbita) se codificarán en cadencia de 2 minutos y se guardarán en la placa para el enlace descendente, mientras que las imágenes de fotograma completo también se codificarán con una cadencia de 30 minutos y se guardarán para el enlace descendente. Los enlaces descendentes de datos reales ocurrirán cada 13.7 días cerca del perigeo. Esto significa que, durante los 2 años, TESS inspeccionará constantemente el 85% del cielo durante 27 días, la metodología fue diseñada de forma que ciertas partes superpuestas serán inspeccionadas por 54 días, 81 días, 181 días y el área a ser examinada de forma continua durante un año completo (351 días de observación), son las zonas de visión de JWST que equivalen al 5% de las zonas a observar.

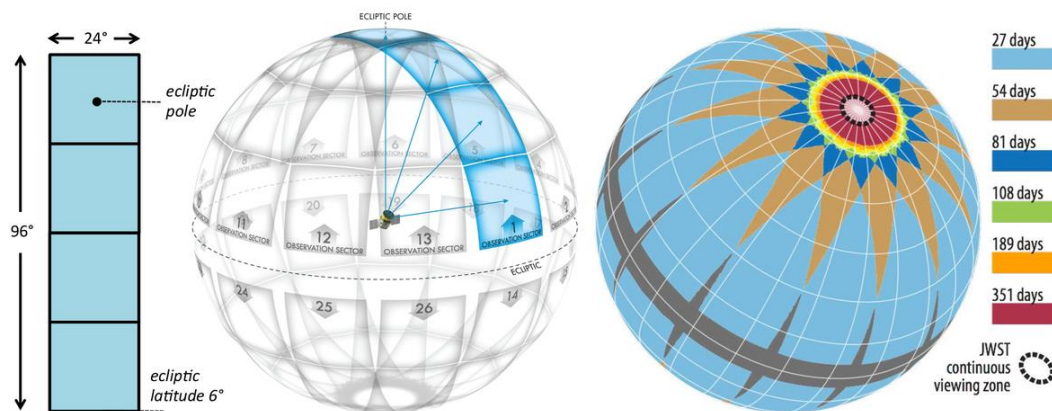


Figura A.11. Los 26 sectores de observación del cielo planeados para TESS y las zonas superpuestas. Imagen tomada de https://tess.gsfc.nasa.gov/images/tess_science.

TESS comenzó operaciones científicas el 25 de julio de 2018. El primer hallazgo anunciado de la misión fue la observación del cometa C / 2018 N1. El primer anuncio de detección de exoplanetas fue el 18 de septiembre, anunciando el descubrimiento de una súpertierra en el sistema Pi Mensae orbitando la estrella cada 6.27 días, añadiendo a un superjúpiter conocido que orbita alrededor de la misma estrella cada 5.9 años (Huang, Chelsea X, et al. 2018).

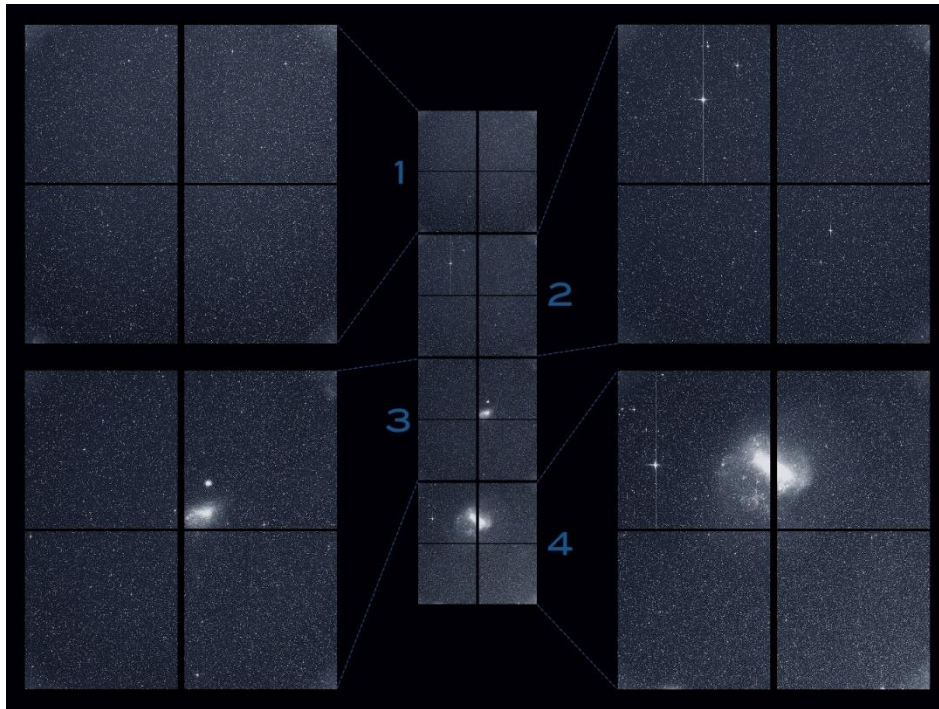


Figura A.12. La primera imagen tomada por TESS, en donde se muestran el mosaico utilizando cuatro cámaras. La fotografía se realizó el 7 de agosto de 2018.

El 20 de septiembre de 2018, se anunció el descubrimiento del planeta LHS 3844 b, con un tamaño ligeramente mayor que la Tierra, y que tiene un periodo orbital ultracorto de 11 horas, siendo uno de los exoplanetas conocidos con el periodo más corto, orbitando la enana roja LHS 3844. Orbita su estrella a una distancia aproximada de 932 000 kilómetros. También es uno de los exoplanetas más cercanos a la Tierra, a una distancia de 14.9 pársecs (Vanderspek, R., et al. 2018). L 98-59 (TOI-175, TIC 307210830) es una estrella enana M brillante, ubicada en la constelación de Volans, a una distancia de 10.623 ± 0.003 pc o 34.648 ± 0.01 años luz, es una estrella enana M3 con tres planetas de tamaño terrestre en tránsito, los planetas fueron anunciados en marzo del 2019.

El tercer exoplaneta descubierto de TESS es HD 202772A b, un Júpiter caliente que orbita el componente más brillante de la estrella binaria visual HD 202772, ubicado en la constelación de Capricornio a una distancia de aproximadamente 480 años luz de la Tierra. El descubrimiento se anunció el 5 de octubre de 2018. HD 202772A orbita a su estrella

anfitriona una vez cada 3.3 días. Es un raro ejemplo de Júpiter caliente que orbita alrededor de estrellas evolucionadas. También es uno de los planetas más fuertemente irradiados conocidos, con una temperatura de equilibrio de 2100 K (Garner, R., 2019).

Al día de hoy (15 de noviembre de 2019) TESS ha confirmado 29 exoplanetas descubiertos y tiene detectados 1361 como objetos de interés (TOI), esto al analizar 16 sectores de la bóveda celeste (<https://tess.mit.edu/publications/> 2019).

Referencias bibliográficas

Aguilar, L. A. (1992), "El problema de n cuerpos en la astronomía" *Revista Mexicana de Física*, 38, 701-738.

Armitage, P.J. (2010), "Astrophysics of Planet Formation", Cambridge U. P.

Bailes, M., Lyne, A. G., y Shemar, S. L. (1991), "A planet orbiting the neutron star PSR1829 – 10", *Nat.*, 352, 311.

Baker, D. C. y Foster, R. S. (1993), "Acceleration of PSR 1620-26 in the Globular Cluster M4", *National Radio Science Meeting*, 5-8, 184.

Bakos, G. Á., Shporer, A., Pál, A., et al. (2007), "HAT-P-5b: A Jupiter-like hot jupiter transiting a bright star", *ApJ*, 671, 173-176.

Barnes, J. R., Barman, T. S., Jones, H. R. A., et al. (2008), "HD179949b: a close orbiting extrasolar giant planet with a stratosphere?", *MNRAS*, 390, 1258-1266.

Barnes, R. y Quinn, T. R. (2001), "A statistical examination of the short-term stability of the ν -Andromedae planetary system", *ApJ*, 550, 884-889.

Barnes, R. y Quinn, T. R. (2004), "The (in) stability of planetary systems", *ApJ*, 611, 494-516.

Benedict, G. F., McArthur, B. E., Harrison, W., et al. (2002), "Astrometry with the Hubble Space Telescope: A Parallax of the Fundamental Distance Calibrator δ Cephei", *ApJ*, 124, 1695-1705.

Bond, I., Udalski, A., Jaroszyński, M., et al. (2004), "OGLE 2003-BLG-235/MOA 2003-BLG-53: A Planetary Microlensing Event", *ApJ*, 606, 155-158.

Borkovits, T., Forgács-Dajka, E., Regály, Z. (2004), "Tidal and rotational effects in the perturbations of hierarchical triple stellar systems. I. Numerical model and a test application for Algol", *A&A*, 426, 951-961.

Boss, A. (2009), "The crowded universe: the search for living planets", New York: Basic Books.

Bogolyubov, N. M. (1970), "Introduction to non-linear mechanics", Kraus, URSS.

Broucke, R. A. (2001), "Stable orbits of planets of a binary star system in the three-dimensional restricted problem", *Celest. Mech. and Dynamic. Astron.*, 81, 321-341.

Buchhave, L. A., Bakos, G. A., Hartman, J. D., et al. (2010), "HAT-P-16b: A 4 M_J Planet Transiting a Bright Star on an Eccentric Orbit", *ApJ*, 720, 1118.

Buchhave, L. A., Latham, D. W., Johansen, A., et al. (2012), "VizieR Online Data Catalog: Stellar parameters of KOI stars VizieR Online Data Catalog (other), 380.

Burrows, A., Hubbard, W. B., Lunine, J. I. y Liebert, J. (2001), "The theory of brown dwarfs and extrasolar giant planets", *Reviews of Modern Physics*, 73, 719.

Butler, R. P., Marcy, G. W., Fischer, D. A., et al. (1999), "Evidence for multiple companions to μ Andromedae", *ApJ*, 526, 916.

Campbell, B., Walker, G. A. H., Yang, S., et al., (1988) "A search for substellar companions to solar-type stars", *ApJ*, 331, 902-921.

Caro, S y Silva, T. (2008), "Epístola a Herodoto. Introducción, traducción y notas", *ONOMÁZEIN*, 17, 135-170.

Carrol, B. W. y Ostlie, D. A. (2007), "An Introduction to Modern Astrophysics"

Carter, J. A., Fabrycky, D. C., Ragozzine, D., et al. (2011), "KOI-126: A Triply Eclipsing Hierarchical Triple with Two Low-Mass Stars", *Science*, 331, 562.

Celetti, A., y Perozzi, E. (2007), "Celestial mechanics", Berlin: Springer.

Chambers, J. E. (1999), "A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies", *MNRAS*, 304, 793-799.

Charbonneau, D., Brown, T. M., Latham, D. W., et al. (2000), "Detection of planetary transits across a sun-like star", *ApJ*, 529, 45-48.

Charbonneau, D., Blake, C. H., White, R. J., et al. (2007), "A radial velocity survey for exoplanets orbiting L-dwarf stars", *BAAS*, 39, 145.

Chavéz, C., Georgakarakos, N., Prodan, S., et al. (2015), "A dynamical stability study of Kepler circumbinary planetary systems with one planet", *MNRAS*, 446, 1283-1292.

Cohen, B. y Whitman, A. (2009), "The Principia: a new translation and guide", University of California Press.

Collier C. A., Wilson, D. M., West, R. G., et al. (2007), "Efficient identification of exoplanetary transit candidates from SuperWASP light curves", *MNRAS*, 380, 1230-1244.

Conway, A., Gilmour, I., Jones, B. W., et al. (2011), "An Introduction to Astrobiology", Cambridge U. P.

Correa-Otto, J.A. (2012), "Formación planetaria en sistemas binarios compactos", Ph.D. Thesis.

Correia, A. C. M., Udry, S., Mayor, M., et al. (2005), "The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XIII. A pair of planets around HD 202206 or a circumbinary planet?", *A&A*, 440, 751-758.

Curiel, L., Canto, J., Georgiev, L., et al. (2011), "A fourth planet orbiting u Andromedae", *A&A*, 525, 5.

De Bruijne, J. H. J. (2012), "Science performance of Gaia, ESA's space-astrometry mission", *Astrophysics and Space Science*, 341, 31-41.

Doolin, S. y Blundell, K. (2011), "The dynamics and stability of circumbinary orbits", *MNRAS*, 418, 2656-2668.

Doyle, L. R., Carter, J. A., Fabrycky, D. C., et al. (2011), "Kepler-16: A transiting circumbinary planet", *Science*, 333, 1602.

Dvorak, R. (1982), "Planetary orbits in double star systems", Oesterreichische Akademie Wissenschaften Mathematisch naturwissenschaftliche Klasse, 191, 423.

Dvorak, R. (1984), "Numerical experiments on planetary orbits in double stars, Celes. Mech., 34, 369.

Dvorak, R. (1986), "Critical orbits in the elliptical restricted three-body problem", A&A, 167, 379-386.

Dvorak, R, Froeschlé, Ch y Froeschlé, Ci. (1989), "Stability of outer planetary orbits (p – types) in binaries", A&A, 226, 335-342.

Echeverría, J. (1987), "Estrellas binarias interactivas", Fondo de Cultura Económica.

Eggleton, P. P., Kiseleva, L. y Hut, P. (1998), "The equilibrium tide model for tidal friction", ApJ, 499, 853.

Eggleton, P. P., Kiseleva-Eggleton, L. (2001), "Orbital evolution in binary and triple stars, with an application to SS Lacertae", ApJ, 562, 1012-1030.

Fierro, J. y Herrera, M. A. (1988), "La familia del Sol", Fondo de Cultura Económica.

Fischer, D., Howard, A. W., Laughlin, G.P., et al. (2015), "Exoplanet detection techniques", arxiv: 1505.06869v2, 23.

Forbes, E. G. (1971), "The Rational Basis of Kepler's Laws", Journal of the British Astronomical Association, 82, 33.

Gaia Collaboration; Brown, A. G. A.; Vallenari, A.; Prusti, T.; de Bruijne, J.; Mignard, F.; Drimmel, R. et al. (2016), "Gaia Data Release 1. Summary of the astrometric, photometric, and survey properties", A&A, 595, 23.

Garner, R. (2019). "NASA's TESS Discovers its First Earth-size Planet". NASA.

Georgakarakos, N. (2013), "The dependence of the stability of hierarchical triple systems on the orbital inclination", New. Astron., 23, 41-48.

Gilarte, M. (2013), "El hereje que adivinó otros mundos", Observatorio Astronómico de Almadén de la Plata, <http://www.abc.es/ciencia/20130510/abci-hereje-ativino-otros-mundos-201305101205.html>.

Gray, D. F. (1997), "The Antics of 51 Peg", BAAS, 29, 1116.

Gray, D. F. y Hatzes, A. P. (1997), "Non-radial oscillation in the solar-temperature star 51 Pegasi", ApJ, 490, 412-424.

Haghighipour, N. (2004), "On the dynamical stability of γ Cephei; an s - type binary planetary system", The Search for Other Worlds, 713, 269-272.

Harrington, R. S. (1977), "Planetary orbits in binary stars", AJ, 82, 753.

Hatzes, A. P., Cochran, W. D., Endl, M., et al (2003), "A Planetary Companion to γ Cephei A", ApJ, 599, 1383-1394.

Henry, G. W., Marcy, G. W., Butler, R. P., et al. (2000), "A Transiting ``51 Peg-like" Planet", ApJ, 529, 41-44.

Hilditch, R. W. (2001), "An Introduction to Close Binary Stars", Cambridge U. P.

Holman, M. J. y Wiegert, P. A. (1999), "Long-term stability of planets in binary systems", AJ, 117, 621.

Holmberg, E. (1941), "On the Clustering Tendencies among the Nebulae. II. a Study of Encounters between Laboratory Models of Stellar Systems by a New Integration Procedure", ApJ, 94, 385.

Huang, Chelsea X., et al. (2018). "TESS Discovery of a Transiting Super-Earth in the Pi Mensae System". arXiv:1809.05967.

Irwin, Patrick, G. J. (2008), "Detection Methods and Properties of Known Exoplanets", Springer Praxis Books.

Jacob, W. S. (1855), "Discovery of a New Planet. On certain anomalies presented by the binary star 70 Ophuchi", MNRAS, 15, 228-231.

Jaime, L. G., Pichardo, B. y Aguilar, L. (2012), "Regions of dynamical stability for discs and planets in binary stars of the solar neighbourhood", MNRAS, 427, 2723.

Johnson, M. y Harrington, J. D. (2014), "NASA's Kepler discovers first earth - size planet in the 'habitable zone' of another star", <https://www.nasa.gov/ames/kepler/nasas-kepler-discovers-first-earth-size-planet-in-the-habitable-zone-of-another-star>.

Kocha, D., Boruckia, W., Dunhamb, B, et al. (2004), "Overview and status of the Kepler Mission", Optical, Infrared, and Millimeter Space Telescopes, SPIE, 5487, 10.

Karttunen, H., Kroger, P., Oja, H., et al. (2007), "Fundamental Astronomy", Springer Berlin.

Kinoshita, H. y Nakai, H. (1989), "Numerical integration methods in dynamical astronomy", Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 45, 231-244.

Kiseleva, L. G., Eggleton, P. P. y Mikkola, S. (1998), "Tidal friction in triple stars", MNRAS, 300, 292.

Kostov, V. B., McCullough, P. R., Hinse, T. C., et al. (2013), "A gas giant circumbinary planet transiting the F star primary of the eclipsing binary star KIC 4862625 and the independent discovery and characterization of the two transiting planets in the Kepler-47 system", ApJ, 52, 19.

Kostov, V., McCullough, P. R., Carter, J. A., et al. (2014), "Discovery and characterization of circumbinary planets from Kepler", American Astronomical Society Meeting Abstracts, 223, 132.

Kostov, V. B., McCullough, P. R., Carter, J. A., et al. (2014), "Kepler-413b: A slightly misaligned, Neptune-size transiting circumbinary planet", ApJ, 784, 14.

Kostov, V. B., Orosz, J. A., Welsh, W. F., et al. (2016), “Kepler-1647b: The largest and longest-period Kepler transiting circumbinary planet”, *ApJ*, 827, 86.

Kubala, A., Black, D. C. y Szebehely, V. (1993), “Stability of outer planetary orbits around binary stars – a comparison of Hill’s and Laplace’s stability criteria”, *Celest. Mech. and Dynamic. Astron.*, 56, 51.

Latham, D. W., Stefanik, R. P., Mazeh, T., et al. (1989), “Spectroscopic Searches for Low-Mass Companions of Stars”, *BAAS*, 21, 1224.

Lissauer, J. (2007), “Planets formed in habitable zones of M dwarf stars probably and deficient in volatiles”, *ApJ*, 660, 149-152.

Lissauer, J. (2011), “Kepler and Exoplanet System Architecture”, *EPSC-DPS Joint Meeting*, 34.

Lyne, A. G. y Bailes, M. (1992), “No planet orbiting PSR1829-10”, *Nat.*, 355, 213.

Mancini, L., Lillo-Box, J., Southworth, J., et al. (2016), “Kepler-539: a young extrasolar system with two giant planets on wide orbits and in gravitational interaction”, *A&A*, 590,

Marcy, G. W., Butler, R. P., Williams, E., et al. (1997), “The planet around 51 Pegasi”, *ApJ*, 481, 926.

Mardling, R. A. (2001), “Stability in the General three-body problem”, *Evolution of Binary and Multiple Star Systems*, 229, 101.

Mason, J. (2008), “Exoplanets. Detection, formation, properties, habitability”, Berlin: Springer.

Matijevic, G., Prsa, A., Orosz, J. A., et al. (2012), “Kepler Eclipsing Binary Stars. III. Classification of Kepler Eclipsing Binary Light Curves with Locally Linear Embedding”, *AJ*, 143, 123.

Mayor, M. y Queloz, D. (1995), "A Jupiter-mass companion to a solar type star", Nat., 378, 355-359.

McGiffin, Daniel A.; Mathews, Michael; Cooley, Steven (2001). "HIGH EARTH ORBIT DESIGN FOR LUNAR-ASSISTED MEDIUM CLASS EXPLORER MISSIONS" Greenbelt, MD: NASA Goddard Space Flight Center.

Meeus, J. (1991), "Ephémérides Astronomiques 1992", Supplément à la revue l'Astronomie, 128.

Mikkola, S. (1997), "Practical symplectic methods with time transformation for the few-body problem", Celest. Mech. and Dynamic. Astron., 67, 145.

Mikkola, S. e Innanen, K. (1999), "Symplectic tangent map for planetary motions", Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 74, 59-67.

Montgomery, R. y Bor, G. (2013), "Poincare y el problema de *n-cuerpos*", Miscelánea matemática de la Sociedad Matemática Mexicana, 57.

Morbidelli A. (2002). Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics, Taylor & Francis.

Moreno Corral, M. A. (1997), "La morada cósmica del hombre", Fondo de cultura económica.

Montenbruck, O. (1989), "Practical ephemeris calculations", Berlin, New York: Springer-Verlag.

Moutou, C. y Pont, C. (2005), "Detection and characterization of extrasolar planets: the transit method", Formation planétaire et exoplanètes Ecole CNRS de Goutelas XXVIII.

Muir, H. (2007), "Goldilocks planet may be just right for life", New scientist, <https://www.newscientist.com/article/dn11710-goldilocks-planet-may-be-just-right-for-life/>.

Musielak, Z. E., Cuntz, M., Marshall, E. A. y Stuit, T. D. (2005), "Stability of planetary orbits in binary systems", *A&A*, 434, 355.

Murray, C. D. y Corriea, A. C. M. (2011), "Exoplanets", University of Arizona Press.

Murray, C. D. y Dermott, S. F. (1999), "Solar system dynamics", Cambridge UP.

North, J. D. (2001), "Historia Fontana de la astronomía y la cosmología. Fondo de Cultura Económica.

Olguín, L. R. (2010), "Formación de las Estrellas. Estrellas binarias". Universidad de Sonora.

Olliver, M., Encrenaz, T., Roques, F., et al. (2009), "Planetary systems. Detection, formation and habitability of extrasolar planets", Springer-Verlag.

Orosz, J. A. y Hauschildt, P. H. (2000), "The use of the NextGen model atmospheres for cool giants in a light curve synthesis code", *AAP*, 364, 265.

Orosz, J. A., Welsh, W. F., Carter, Joshua, A. (2012), "The neptune-sized circumbinary planet Kepler -38b", *ApJ*, 758, 87.

Orosz, J. A., Welsh, W. F., Carter, Joshua, A., et al. (2012), "VizieR Online Data Catalog: Kepler-47 transits", *VizieR On-line Data Catalog*, 210.

Peña, Ma. C. y Palacián, J. F. (2006), "Simulación en tres dimensiones del problema de n cuerpos", *Monografías de la Real Academia de Ciencias de Zaragoza*, 28, 9-21.

Perryman, M. A. C., Lindegren, L., Kovalevsky, J., et al. (1997), "The HIPPARCOS Catalogue", *A&A*, 323, 49.

Perryman, M. A. C. (2001), "Extra-solar planets", *Europhysics News*, 32, 9-13.

Pilat-Lohinger, E., Funk, B. y Dvorak, R. (2003), "Stability limits in double stars. A study of inclined planetary orbits", *A&A*, 400, 1085.

Popova, E. A. y Shevchenko, I. I. (2013), "Kepler-16b: safe in a resonance cell", *ApJ*, 769, 152.

Prialnick, D. (2000), "An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution", Cambridge U. P.

Prsa, A., Batalha, N., Slawson, R. W., et al. (2011), "Kepler Eclipsing Binary Stars. I. Catalog and Principal Characterization of 1879 Eclipsing Binaries in the First Data Release", *AJ*, 141, 83.

Raymond, S. N., Quinn, T. R. y Lunine, J. I. (2004), "Making other earths: dynamical simulations of terrestrial planet formation and water delivery", *Icarus*, 168, 1-17.

Rodríguez, L. F. (2015), "Otros astros, otros mundos", ¿Cómo ves? UNAM, 201, 10-14.

Saytal, S. (2014). "Orbital stability analysis and chaotic dynamics of exoplanets in multi - stellar system", Ph.D Thesis.

Schneider, J. (2011), "Defining and cataloging exoplanets: The exoplanet.eu database", EPSC-DPS Joint Meeting, 6, 2.

Seager, S. y Deming, D. (2010), "Exoplanet atmospheres", *A&A*, 48, 631-672.

See, T. J. J. (1896), "Researches on the orbit of 70 Ophiuchi, and on a periodic perturbation in the motion of the system arising from the action of an unseen body", *AJ*, 16, 17-23.

Sigurdsson, S., Richer, H. B., Hansen, B. M., et al. (2003), "A young white dwarf companion to Pulsar 1620-26: evidence for early planet formation", *Science*, 301, 193.

Slawson, R. W., Prsa, A., Welsh, W. F., et al. (2011), "Kepler Eclipsing Binary Stars. II. 2165 Eclipsing Binaries in the Second Data Release", *AJ*, 142, 160.

Soderhjelm, S. (1984), "Third-order and tidal effects in the stellar three-body problem", *A&A*, 141, 232.

Spiegel, D. S. y Burrows, A. (2013), "Erratum: Spectral and Photometric Diagnostics of Giant Planet Formation Scenarios", *ApJ*, 776, 138.

Szebehely, V. (1980), "Stability of planetary orbits in binary systems" *Celest. Mech.*, 22, 7-12.

Szebehely, V. y McKenzie, R. (1981), "Stability of outer planetary systems", *Celest. Mech.*, 23, 3-7.

Szebehely, V. (1984), "Review of concepts of stability", *Celest. Mech.*, 34, 49-64.

Tenorio Tagle, G y Muñoz – Tuñón, C. (2004), "La luz con el tiempo dentro", Fondo de Cultura Económica.

Thorsett, S. E., Arzoumanian, Z. y Taylor, J.H. (1993), "PSR B1620-26 - A binary radio pulsar with a planetary companion?" *ApJ*, 412, 33-36.

Tal-Or, L., Mazeh, T., Alonso, R., et al. (2013), "CoRoT 101186644: A transiting low-mass dense M-dwarf on an eccentric 20.7-day period orbit around a late F-star. Discovered in the CoRoT lightcurves", *AAP*, 553, A30.

TESS: Transiting Exoplanet Survey Satellite. NASA. (2014). FS-2014-1-120-GSFC (consultado en 2019).

Tull, R. G., McQueen, P. J., Good, J., Epps, H. W. (1998), "High resolution spectrograph for the Hobby-Eberly Telescope ", *Bulletin of the American Astronomical Society*, 30.

Tull, R. G., McQueen, P. J., Sneden, C., y Lambert, D. L. (1995), "The high-resolution cross-dispersed echelle white-pupil spectrometer of the McDonald Observatory 2.7-m telescope", *PASP*, 107, 251.

Udalski, A. (2003), "The Optical Gravitational Lensing Experiment. Real Time Data Analysis Systems in the OGLE-III Survey", *Acta Astron*, 53, 291-305.

Van de Kamp, P. (1969), "Alternate dynamical analysis of Barnard's star", *AJ*, 74, 757-759.

Vanderspek, R., et al. (2018). "TESS Discovery of an ultra-short-period planet around the nearby M dwarf LHS 3844". *Apj Letters*. arXiv:1809.07242.

Vogt, S. S., Allen, S. L., Bigelow, B. C., et al. (1994), "HIRES: the high-resolution echelle spectrometer on the Keck 10-m Telescope", *Procspie*, 2198, 362.

Vogt, S. S. (1987), "The Lick Observatory Hamilton Echelle Spectrometer", *PASP*, 99, 1214.

Welsh, W. F., Orosz, J. A., Carter, Jousha. A., et al. (2012), "Transiting circumbinary planets Kepler-34 b and Kepler-35 b", *Nature*, 481, 475.

Welsh, W. F., Orosz, J. A., Short, D. R., et al. (2015), "Kepler 453 b - the 10th Kepler transiting circumbinary planet", *ApJ*, 809, 17.

Wolszczan, A. y Frail, D. A. (1992), "A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257 + 12", *Nat.*, 355, 145-147.

Zamora, S. B. (1998). "Estudio de la evolución de sistemas dinámicos clásicos y cuánticos utilizando métodos algebraicos", Ph.D Thesis.

Ziglin, S. L. (1975), "Secular evolution of the orbit of a planet in binary star system", *Soviet Astronomy letters*, 1, 45-47.

Resumen autobiográfico

Mi nombre es Miranda Abigail Ortiz Alonso, poseo grado de Licenciatura en Ingeniería Química, una Maestría en Enseñanza de la Ciencia con Especialidad en Matemáticas y un Diplomado en Competencias Docentes. Esta presente tesis es un requisito parcial para acreditar el grado de Maestría en Astrofísica Planetaria y Tecnologías Afines. Al término de esta maestría, mi siguiente objetivo es continuar con mis estudios al realizar un Doctorado en Ingeniería Física Industrial en la FCFM de la UANL.

La experiencia laboral que tengo es en el ámbito académico donde me desarrollo como maestra de la Facultad de Agronomía de la UANL, en donde imparto unidades de aprendizaje en las áreas de matemáticas, física e ingeniería.

Desarrollé un gusto por la astrofísica, primero como aficionada, impartiendo conferencias en la Sociedad Astronómica del Planetario Alfa, el ITESM, en los cuales tuve la oportunidad de asistir a varios congresos. Tal gusto por la astrofísica, me llevo a la transición de aficionada a profesional por medio de esta maestría.